

# 271 奇数次單葉冪級數ノ切断ノ單葉半徑ニ 就イテ, II

城 憲 三 (阪大工)

第 261 号論文ヲ私ハ次ノ定理ヲ証明シマシタ。

## 定理 1.

$$(1) \varphi(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1} + \dots$$

ヲ  $|z| < 1$  デ正則單葉トシ, スベテノ係數  $a_{2n+1}$  ( $n=1, 2, \dots$ )  
ハ實數デアルトスル、コノトキハスベテノ切断

$$\Delta_n(z) \equiv z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

ハ  $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$  デ單葉デアル。

本論文ニ於イテハ、更ニ定理 1 ノ係數が實數ナリト云フ  
條件ヲ除去シテ次ノ定理ノ眞ナルコトヲ示シテ見マス。

## 定理 2.

$$\varphi(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1} + \dots$$

ガ  $|z| < 1$  デ正則單葉デアルナラバ, スベテノ切断  $\Delta_n(z)$  ハ  
 $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$  デ單葉デアル。

コノタメニ豫備定理トシテ能代氏ノ定理ヲ用ヒルト樂ニ  
計算ヲ進ム様デス、コノ豫備定理ヲ從來ノ豫備定理ト合ハセ  
用ヒテ, 最初三ツノ切断

$$\Delta_1(z) \equiv z + a_3 z^3,$$

$$\Delta_2(z) \equiv z + a_3 z^3 + a_5 z^5,$$

$$\Delta_3(z) \equiv z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + a_7 z^7$$

ハ先ツ  $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$  デ單葉ナルコトガ余リ, 後ハ前ト同方法ヲ計

算シマス。(コノタメニ第261号論文ニ於テモ幾分簡單化サ  
レル様ニナリマシタ)

定理2ヲ証明スル方針ニ基キ、豫備定理ノ一ツトシテ能  
代——尾崎氏ノ定理ヲ加ヘ更ニ拡張サレタル定理トシテ $k$ -級  
ノ單葉冪級數

$$p_k(z) = z + a_1^{(k)} z^{k+1} + a_2^{(k)} z^{2k+1} + \dots + a_\nu^{(k)} z^{\nu k+1} + \dots$$

( $k=1, 2, \dots$ )

ノ切断ノ性質ニマデ進展出来ル様ニ思ハレマス。

§1. 定理2ハ次ノ豫備定理ヲ必要トシマス。

豫備定理1.

$$|z_1|, |z_2| < 1 \text{ ナルトキハ}$$

$$(2) \quad \left| \frac{p(z_1) - p(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \left( \frac{1 - |z_1|^2}{1 + |z_1|^2} \right)^2 \cdot \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2|}{(|z_1 - z_2| + |1 - \bar{z}_1 z_2|)^2}$$

証明ハ第261号論文ニアリマス。

豫備定理2.

$$(3) \quad \begin{cases} |a_{2n+1}| < 2^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} = 3,39 \dots < 3,4 = \frac{17}{5} \quad (n=1, 2, \dots) \\ * = |a_n| < 1,8 \end{cases}$$

\*) J.F. Littlewood 及ビ R.E.A.C. Paley ハ  $a_{2n+1} = O(1)$  ナルコトヲ発見シテ我々  
ヲ驚カセタノハマデ極最近デアレガ、今又 V. Levin, 上記論文  $|a_{2n+1}|$   
 $= A < 2^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}}$  ナル結果ヲ得タ、デアレ (Levin, Proceedings of the  
London Mathematical Society, 39, (1935), p. 467-480). Levin, 結果  
ハ Landau ニ買フトコト大ナルモ、ガアルト筆者ハ驚像ス。

コノ前ノ論文ニ係數評価ノタメ Grandjot ノ方法ヲ用ヒル様ニ述ベタガ今  
ハソノ必要ガナクナツタ。  $|a_n| < 1,8$  ナル結果ハ Levin ノ上記論文ニアル  
結果  $|a_n| < 1,70$  ヨリ悪イケレドモ我々ノ計算ニヨレバ  $|a_n| < 1,70$  トハナ  
ラナイ。

豫備定理 3.

$|K(\tau)| = 1$  かつ函数  $K(\tau)$  存在シ

$$(A) \begin{cases} a_3 = -\int_0^{\infty} K(\tau) e^{-\tau} d\tau, \\ a_5 = \frac{3}{2} \left[ \int_0^{\infty} K(\tau) e^{-\tau} d\tau \right]^2 - \int_0^{\infty} K^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau \end{cases}$$

トオケコトが出来ル。コノ証明ハ K, Löwner, "Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I," Math. Annalen, 89 (1923), 103-121 = アリマス。

豫備定理 4.

$$f(z) = z + \dots$$

ガ  $|z| < R$  デ regular かつ  $\Re(f'(z)) > 0$  かつ  $f(z)$  ハ  $|z| < R$  デ 單葉 デアル。

コノ証明ハ K. Noshiro, "On the theory of Schlicht Functions," (北大, Journal) = アリマス。

§2.  $\delta_1(z), \delta_2(z), \delta_3(z), |z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$  デ 單葉 ナル証明(予備定理 3, 4 ヲ用ヒル)

I.  $z + a_3 z^3, |z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$  デ 單葉 ナルコトハ性質  $|a_3| \leq 1$  ヲリ明ラカ。

II.  $z + a_3 z^3 + a_5 z^5, |z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$  デ 單葉 ナルコトハ, コノ前ヨリ 単純 = 次ノ様ニ云ヘバヨイ。

$$\Re \delta_2'(z) \equiv \Re (1 + 3a_3 z^2 + 5a_5 z^4), |z| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{於ケル Min.}$$

ハ  $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$  起ルト考ヘテ一般性ヲ失ハナイ。何者、モシ然ラズシテ  $Min.$  ガ  $z = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\theta}$  起ルナラバ  $\varphi(z)$  ノ代リ =  $e^{-i\theta} \cdot \varphi(e^{i\theta} z) = z + a_3 e^{i2\theta} z^3 + a_5 e^{i4\theta} z^5 + \dots$  考ヘタラ

$$R_{z'}(z) = R(1 + 3a_3 e^{i2\theta} z^2 + 5a_5 e^{i4\theta} z^4)$$

トナリ、コノ  $Min.$  ハ  $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$  起ルコトヲ示ルカラデアイル。

従ツテ

$$R\left(1 + a_3 + \frac{5a_5}{9}\right) > 0 \quad \text{即チ} \quad R(-9a_3 - 5a_5) < 9$$

ナルコトヲ云ハバヨイ。

$$(5) \quad a_3 = x_1 + iy_1, \quad a_5 = x_2 + iy_2$$

トオキ

$$-9x_1 - 5x_2 < 9$$

ナルコトヲ示セバヨイノデアイルガ、之レハ既ニ第261号論文ヲ述ベタ。

III.  $R(1 + 3a_3 z^2 + 5a_5 z^4 + 7a_7 z^6) > 0$  , 証明モ同様デアイル。

左辺ノ  $Min.$  ハ  $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$  起ルトスル。

$$R'_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 + a_3 + \frac{5a_5}{9} + \frac{7a_7}{27}$$

デアカラ

$$R\left\{-\frac{27}{7} - \frac{27}{7} a_3 - \frac{15}{7} a_5\right\} < R a_7$$

ナルコトヲ示セバヨイ。 (4), (5) ヲ用ヒ、

$$K(\tau) \equiv x(\tau) + iy(\tau)$$

トオキ

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}\left\{-\frac{27}{7}-\frac{27}{7}a_3-\frac{15}{7}a_5\right\} \\
& = -\frac{27}{7}-\frac{27}{7}x_1-\frac{15}{7}\mathcal{R}\left\{\frac{3}{2}\left[\int_0^\infty \kappa(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]^2-\int_0^\infty \kappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right\} \\
& = -\frac{27}{7}-\frac{27}{7}x_1-\frac{45}{14}(x_1^2-y_1^2)+\frac{15}{7}\int_0^\infty (x^2(\tau)-y^2(\tau))e^{-2\tau}d\tau \\
& = -\frac{27}{7}-\frac{27}{7}x_1-\frac{45}{14}x_1^2+\frac{45}{14}\left(\int_0^\infty y(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^2+\frac{15}{7}\int_0^\infty (1-2y^2(\tau))e^{-2\tau}d\tau \\
& -\frac{27}{7}x_1-\frac{45}{14}x_1^2 \leq \frac{81}{280} \Rightarrow \text{アロカテ} \\
& \leq -\frac{27}{7}+\frac{81}{280}+\frac{15}{14}+\frac{45}{14}\left(\int_0^\infty y(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^2-\frac{30}{7}\int_0^\infty y^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau \\
& = -\frac{699}{280}+\frac{15}{7}\left\{\frac{3}{2}\left(\int_0^\infty y(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^2-2\int_0^\infty y^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right\}
\end{aligned}$$

Schwarz-Cauchy の不等式 = ヨツテ

$$\left(\int_0^\infty y(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^2 \leq \int_0^\infty y^2(\tau)e^{-\tau}d\tau \int_0^\infty e^{-\tau}d\tau = \int_0^\infty y^2(\tau)e^{-\tau}d\tau$$

アロカテ

$$\begin{aligned}
& \leq -\frac{699}{280}+\frac{15}{7}\int_0^\infty y^2(\tau)\left\{\frac{3}{2}e^{-\tau}-2e^{-2\tau}\right\}d\tau \\
& = -\frac{699}{280}+\frac{15}{7}\int_0^1 y^2(-\log x)\left\{\frac{3}{2}-2x\right\}dx \\
& = -\frac{699}{280}+\frac{15}{7}\int_0^{\frac{3}{4}} y^2(-\log x)\cdot\left(\frac{3}{2}-2x\right)dx+\frac{15}{7}\int_{\frac{3}{4}}^1 y^2(-\log x)\left(\frac{3}{2}-2x\right)dx
\end{aligned}$$

$$|y^2(-\log x)| = |y^2(\tau)| \leq 1 \text{ デアルカラ}$$

$$< -\frac{699}{280} + \frac{15}{7} \int_0^{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{2} - 2x\right) dx$$

$$= -\frac{699}{280} + \frac{15}{7} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{723}{560} < -1,25 < Ra_7 \quad (|a_7| < 1,25^{**})$$

以上デ  $\Delta_3(x) \equiv x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7$ ,  $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$  デ單葉 +  $\nu$  エトガ分ツタ。

§3.  $\Delta_n(x) \equiv x + a_3 x^3 + \dots + a_{2n+1} x^{2n+1}$  ( $n \geq 4$ ),  $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$  デ單葉 +  $\nu$  証明 (予備定理 1, 2 ヲ用ヒル) コノ前ノ方法ト大同小異デアアル。

$|z_1| = |z_2| = \frac{1}{\sqrt{3}}$  トシテ,  $z_1 = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ,  $z_2 = \frac{x}{\sqrt{3}}$  ( $|x|=1$ ) トシテヨイ。ユノトキハ (2) ヨリ

$$(6) \quad \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left| 1 - \frac{x}{3} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} \left| 1 - x \right| + \frac{1}{3} \left| \frac{(1-x)^2}{1 - \frac{x}{3}} \right|},$$

$$(7) \quad \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{2\nu+1} \frac{z_1^{2\nu+1} - z_2^{2\nu+1}}{z_1 - z_2} \right| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu} \left| \frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x} \right| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu} (2\nu+1)$$

\*\* 計算ノ結果  $|a_7| < 1,249 \dots$  ヲ得ル, (Levinノ上記論文参照)。又

Grandjotノ方法デ本論文ニ関係ハナイガ  $|a_9| < 1,38$  ナルコトハ示

サレル (第261号論文参照)。Levinノ方法デハ  $|a_9| < 1,38$  トハ

ナラナイヤウニ思ヒマス。前ノ261号論文デ不等式  $|a_9| < 1,38$  ヲ用

ヒマシタガ予備定理4ヲ用フレバ之ハ不要トナリ Dieudonnéノ定理

$|a_{2n+1}| + |a_{2n-1}| \leq 2$  ガケテ進行出来マス。

トナルが、場合ヲニツ = 余ケテ  $n \geq 4 =$  對シ

$$(8) \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| > \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{2\nu+1} \frac{z_1^{2\nu+1} - z_2^{2\nu+1}}{z_1 - z_2} \right|$$

ナルコトヲ示サテ。我々ハ (8) ノ 成立スルコトヲ示セバヨイ。

a)  $|1-x| \leq 0,38$  ナル場合

コトキハ (8) ヲ証明スルタメ = (17) ヨリ  $n \geq 4 =$  對シ

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{2\nu+1} \frac{z_1^{2\nu+1} - z_2^{2\nu+1}}{z_1 - z_2} \right| &\leq \sum_{\nu=5}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu} (2\nu+1) \\ &< \frac{|a_{11}|}{3^5} \cdot 11 + \frac{17}{5} \sum_{\nu=6}^{\infty} \frac{2\nu+1}{3^\nu} \\ &< \frac{1,8 \cdot 11}{3^5} + \frac{17}{5} \cdot \frac{13 \cdot \frac{1}{3^6} - 11 \cdot \frac{1}{3^7}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{218}{125} < 0,18. \end{aligned}$$

他方 = 於テ (6) ヨリ

$$\left|1 - \frac{x}{3}\right| \leq \frac{2+|1-x|}{3} \leq \frac{2,38}{3}, \quad \frac{1}{3} \left| \frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}} \right| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{0,1444}{1-\frac{1}{3}} = \frac{0,1444}{2}$$

デアレカラ

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left|1 - \frac{x}{3}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}} |1-x| + \frac{1}{3} \left| \frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}} \right|} &\geq \frac{3}{2(4,76 + 4\sqrt{3} \cdot 0,38 + 0,4332)} \\ &> \frac{3}{15,6548} > 0,19 \cdots > 0,18 \end{aligned}$$

即チ (8) ハ 成立スル。

6)  $|1-x| > 0,38$  +ル場合

(7) ヲリ  $n \geq 4$  = 對シ

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{2\nu+1} \frac{z_1^{2\nu+1} - z_2^{2\nu+1}}{z_1 - z_2} \right| \leq \sum_{\nu=5}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu} \left| \frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x} \right|$$

$$\leq \frac{2}{|1-x|} \cdot \sum_{\nu=5}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu}$$

而シテ

$$\sum_{\nu=5}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu} < \frac{1,8}{3^5} + \frac{17}{5} \sum_{\nu=6}^{\infty} \frac{1}{3^\nu} = \frac{1,8}{3^5} + \frac{17}{10 \cdot 3^5} = \frac{35}{10 \cdot 3^5} < 0,015.$$

故 =

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{2\nu+1} \frac{z_1^{2\nu+1} - z_2^{2\nu+1}}{z_1 - z_2} \right| < \frac{2}{|1-x|} \cdot 0,015$$

(8) ヲ証明スル = ハ

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left|1-\frac{x}{3}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}|1-x| + \frac{1}{3} \left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right|} > \frac{2}{|1-x|} \cdot 0,015$$

即チ

$$(9) \left| \frac{1-\frac{x}{3}}{1-x} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \left| \frac{1-x}{1-\frac{x}{3}} \right| < \frac{1}{8 \cdot 0,015} = 8,3 \dots\dots$$

ナルコトヲ示セバヨイノデアアルガ  $\left| \frac{1-\frac{x}{3}}{1-x} \right|$  ハ  $\arg x$  , 減少函

数デ且ツ  $\left|1-\frac{x}{3}\right| < 1$  デアルカラ

$$\left| \frac{1-\frac{x}{3}}{1-x} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \left| \frac{1-x}{1-\frac{x}{3}} \right| < \frac{1}{0,38} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1+\frac{1}{3}}$$

$$< 2,6 + 1,2 + 0,5 = 4,3$$



ヲ得テ (9) ハ成立スル。

依ツテ定理2ヲ証明スルコトが出来ヌ。

(注意) 定理1ハ予備定理1, 3, 4ノミテ証明が出来ルが、定理2ハ更ニ予備定理2ヲ必要トシテキルコトハ面白イト思ヒマス。定理2が拡張出来マシタラ又述べサセテ頂キタイト思ヒマス。

一般ノ冪級数ノ切断ノ研究ニハ東京、仙台、京都、名古屋等ノ方々ノ花々シイ御研究ガアリ、随分雑誌ヲ賑ハサレマシタコトハマダ記憶ニ新シイ。ソレ等ノ研究ハ主トシテ零點ニ着目セラレタ、*Riemann* 面ニ着目シテ又新シイ研究ガ発展建設セラレ、函数論ノ一部門ヲナスト云フコトハ望マレヌコトデアラウカ。