270. 線状可遷作用子ニ関スル展開問題(II)

北川敏男(阪大)

3. 屡々，述ベタ如ク、吾々ノ目標ノ一ツハ，*Fourier*級数論ノ拡張ニ在ッタ。ソコニ知ラレテヰル形式的演算ヲ、吾々ノ場合ニ拡張スル意圖ノモトニ，先ヅ同ジ *Linear transl. Operator* ニ関シテ展開サレタ二ツノ級数ノ積ニツイテ考ヘル。

此処デハ，ソレラノ級数ガモトノ函数ニ，考ヘル區間デ一様ニ、収斂スルトイフコトヲ假定シテ、次ノ如キ関係式ノ成立スルコトヲ擧ゲテ置ク。（収斂條件ヲ精密ニスルコトハ残サレタ問題トシテ）。

(1) $$f(x) \sim \sum_k a_k e^{\lambda_k x} \qquad (1)$$

$$g(x) \sim \sum_k b_k e^{\lambda_k x} \qquad (2)$$

但シ $\{\lambda_k\}$ ハ，母函数 $G(\lambda)\equiv\int_{a-0}^{b+0} e^{\lambda t}\,d\varphi(t)$ ノスベテノ根カラナル集合。各 λ_k ハ單根，従ッテ $G'(\lambda_k)\neq 0$ トスル。

然ルトキ

$$\int_{a-0}^{b+0}\left\{\int_0^t f(\eta)g(t-\eta)d\eta\right\}d\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k b_k G'(\lambda_k) \quad \cdots\cdots(3)$$

(2) 特ニ，$f(x)$ ヲ Linear transl. functional eq ノ解ニ採レバ，

$$\int_{a-0}^{b+0}\left\{\int_0^t f(x+\eta)g(y+t-\eta)d\eta\right\}d\varphi(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_k b_k G'(\lambda_k)e^{\lambda_k(y+x)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3) 簡明ナ形式ヲ導ンデ，特ニ $G'(\lambda_k)\neq 0$ ノ場合ヲ

(1)—(2) デ述ベタガ一般ニハ，

$$\int_{a-0}^{b+0}\left\{\int_0^t f(\eta)g(t-\eta)d\eta\right\}d\varphi(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{\nu=0}^{p_k-1}b_{k,\nu}\nu!\sum_{s=p_k-\nu-1}^{p_k-1}a_{k,s}\frac{s!}{(s+\nu+1)!}G^{(s+\nu+1)}(\lambda_k)\right\} \cdots(5)$$

但シ $$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{p_k-1}a_{k,\nu}x^{\nu}\right)e^{\lambda_k x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$g(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{p_k-1}b_{k,\nu}x^{\nu}\right)e^{\lambda_k x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

4. Exponential function ノ family $\{e^{\lambda_n x}\}$ ニ関スル closure ノ問題ニツイテハ，案外．文献ニ乏シイ。但シ．λ_n ガ純虚数ナルトキ Wiener-paley ノ精細ナ結果ガアル。

次キニ，吾々ハ特ニ

$$\int_{a-0}^{b+0} e^{\lambda t} d\varphi(t) = [B]e^{\lambda b} - [A]e^{\lambda a} \quad \text{------------} (8)$$

トシテ、書キ表ハサレウルトキ，Dirichlet 積分ヲ導入シテ Fourier 級数ト事情ノ異ナラナイコトヲ見タカラ、closure ノ問題モ、ソコデハ解ケタ。然シ上ノ如キ母函数ノ behaviour ハ，極メテ Fourier ノ場合ニ似カヨッテヰテ、Wiener-Paley: Fourier transform p.113 定理 XXXVIII ト如何ナル関係ニアルカガ可成リ興味ガアル。

定理：母函数 $G(\lambda)$ ガ (8) ナル asymptotic behaviour ヲモツトキ $\{e^{\lambda_n x}\}$ ハ，(a, b) デ closed-L_2 デアル。而シテ、closed normal biorthogonal set $\{h_n(x)\}$ ヲモツ。

尚．Wiener-Paley. p.113 (30, 45), (30, 46), (30, 47) ニ相當シタ事實ガアテハマル。

〔注意〕：Wiener-Paley ノ結果ニ比較スルト吾々ノ $\{\lambda_n\}$ ガ必ズシモ純虚数ノ集合デナイ点ガ異ル。

5．前節ノ biorthogonalfunction ノ形ヲ Laplace-integral ノ形デ表ハシテ置クノガ本節ノ目的デアル。簡単ノタメ $G(\lambda)$ ハ單根シカ有シナイトシテ進ム。

今 $$A(\lambda, u) = \begin{cases} e^{-\lambda u} \int_{u-0}^{b+0} e^{\lambda t} d\varphi(t) & a \leqq u \leqq b \\ 0 & u > b \text{ or } u < a \end{cases}$$

$$f(z,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{zu}\,dA(\lambda,u)$$

ト置ク。λヲ $G(\lambda)$ ノ一ツノ根ニトルト，簡單ナ計算ノ結果

$$f(z,\lambda)=\frac{z}{\lambda-z}G(z)$$

Laplace-integral ノ理論カラ

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{-iT}^{iT}\frac{f(z,\lambda)}{z}e^{uz}\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{-iT}^{iT}\frac{G(z)}{\lambda-z}e^{uz}\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\{A(u+0,\lambda)+A(u-0,\lambda)\}$$

從ツテ吾々ノ展開ハ

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\lambda_k x}}{G'(\lambda_k)}\int_{a-0}^{b+0}e^{\lambda_k t}\left(\int_0^t f(\eta)e^{-\lambda_k\eta}d\eta\right)d\varphi(t)$$

$$\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\lambda_k x}}{G'(\lambda_k)}\int_a^b f(\eta)e^{-\lambda_k\eta}\left(\int_{\eta-0}^{b+0}e^{\lambda t}d\varphi(t)\right)d\eta$$

$$\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\lambda_k x}}{G'(\lambda_k)}\int_a^b f(\eta)A(\eta,\lambda_k)\,d\eta$$

故ニ $h_k(\eta)=\dfrac{1}{2\pi i\,G'(\lambda_k)}\lim\limits_{T\to\infty}\displaystyle\int_{-iT}^{iT}\frac{G(z)}{\lambda_k-z}e^{uz}\,dz$

前号255ノ正誤　　北川敏男

コレハ，印刷ノ組違ヒカラ，御迷惑ヲ掛ケマシタ。2節ハ，

18頁上カラ7行目マデデ了リマス。ソコノ8行目カラ、19頁ノ中央デ依ッテ $F(x)=ax^2$ 〃マデガ一番アトニ廻ル譯デス。