

268. 重心ト對稱空間ノ構造トノ關係ニ就テ

南 雲 道 夫 (阪大)

對稱ト距離空間 (定義ハ後ニアリ) = 於テ重心 (有限個ノ点ノ)ヲバニツノ見地カラ考察スル。一ツハ結合ノ法則カラ, モ一ツハ最大確率ノ点トシテ見ル。前者ノ見地ニヨリ, 空間ハ線狀空間 (Banachノ空間)トナル。之レニ後者ノ見地ヲ附ケ足セバ, 空間ハ廣義ノ Euclid空間 (Hilbert空間ニ含マレル)トナル。以上ガ本論ノ要点デアリ。証明ハスデミチニ止メテ置ク。

§ 結合ノ法則ノ見地ヨリ

對稱ト距離空間 \mathcal{R} トハ, 平タク言ヘバ空間ノ各点ヲ中心トシテ空間ガ對稱ナルモノヲ言フ。即チ

$$\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \quad [\overline{AB} \text{ハ } A, B \text{ 間ノ距離}]$$

ナル時 C ヲ A, B ノ中点ト名付ケレバ

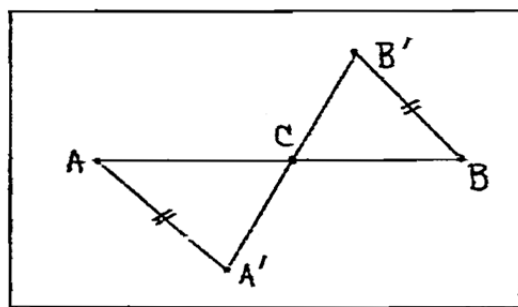
(i) 二点ハ常ニ尺一ツノ中心ヲ有ス。

(ii) A, B ヲ任意ノ二点トスルトキ, B ガ AC ノ中点ニナル様ニ点 C ガ常ニ尺一ツ存在スル。

(iii) C ガ A, B ノ中点デアルト同時ニ, A', B' ノ中点ナラバ

$$\overline{AA'} = \overline{BB'}$$

(iv) \mathcal{R} ハ完全ト距離空間デアリ。(Cauchyノ收斂條件ノ成立スル空間)



以上、四ツノ條件が成立スル空間ヲ對稱デアルト名付ケル。

重心 = 關スル結合ノ法則

(i) C が A, B ノ中点ナラバ; A, B ノ重心ハ C デアル。

(ii) n 個ノ点ノ重心ハ, ソノ内ノ m 個ノ点 ($m < n$) ヲ其ノ m 個ノ点ノ重心 (m 個が重複シタモノ) デ置キカヘテモ変ラナイ。〔之レヲ 重心 = 關スル結合ノ法則 ト名付ケル〕

(iii) カラ特 = (A, B) ヲ以テ A, B ニ点ノ重心 (中点ト一致ス) ヲ表ハセバ, 四点 A, B, A', B' = ツイテ

$$(iii) \quad ((A, B), (A', B')) = ((A, A'), (B, B'))$$

が成立スル。之ヲ 弱イ結合ノ法則 ト名付ケヨウ。

定理 弱イ結合ノ法則, 成立スルトキ; O ヲ μ ,

任意ノ点トシ

$$(O, D) = (A, B)$$

ナル關係が成立スレバ, 之ヲ

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

ヲ表ハスモノト定ムレバ,

$$(1) \quad \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} + \vec{OA}$$

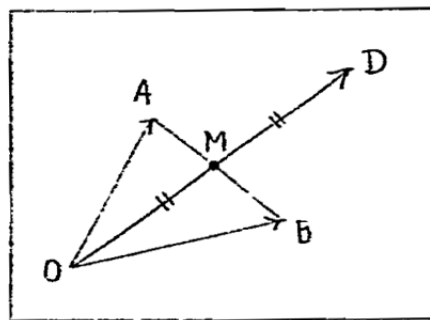
$$(2) \quad (\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OC} = \vec{OA} + (\vec{OB} + \vec{OC})$$

$$(3) \quad \vec{OA} + \vec{OX} = \vec{OB}$$

ナル点 X が一義的ニ定マル。 (Vektor が定義サレタ!))

上ノ定理及ビ $(A, A) = A = \text{ヨリ}$, 結局

$$(A, B) = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$



が証明される。

尚 R が対称空間ナルコト = ヨリ結局 R は線状空間 (Banach Space) ナルコトが証明される。

又結合ノ法則 (ii) が成立スル場合 = ハ、

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

ノ重心 G ハ

$$\vec{OG} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \vec{OA}_{\nu}$$

= ヨツテ與ヘテレナルコトが証明される。(社著論文 Gött. Nachr. 1932, 56 頁参照)

§ 確率函数ノ決定ト R ノ構造

次 = 又一般ノ対称空間 = モドリ、今度ハ n 個ノ点 A_1, A_2, \dots, A_n ノ重心 G ヲバ

$$\varphi(\overline{A_1 G}) \cdot \varphi(\overline{A_2 G}) \dots \varphi(\overline{A_n G}) = \underline{\text{極大!}}$$

= ヨツテ定義スル。 $\varphi(r)$ ($r \geq 0$) ハ 確率函数 デ $\varphi(0) = 1$, $0 < \varphi(r) < 1$ ($r > 0$), $\Rightarrow r =$ 對シテ連続純減小函数デア
ル。

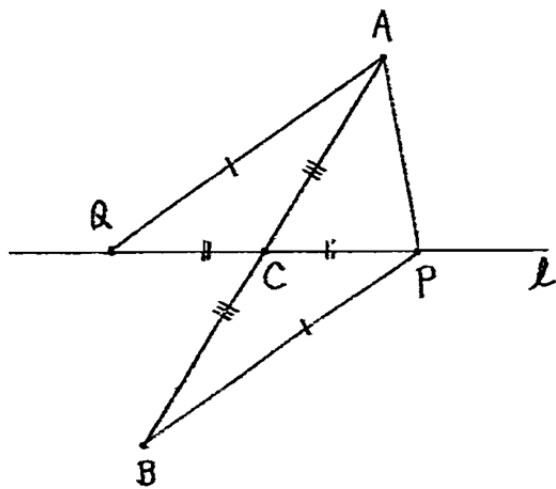
$$\varphi(r) = e^{-f(r)}$$

トスレバ $f(0) = 0$, $f(r) > 0$ ($r > 0$) デ $r =$ ヱキ連続純増加函数トナル。シカシテ G ハ

$$\sum_{\nu=1}^n f(\overline{A_{\nu} G}) = \underline{\text{極小!}}$$

= ヨツテ定義される。

先ツ重心が一義的 = 決定スルタメ = $f(\overline{AX})$ ハ X ノ
 函数トシテ konvex デナケレバナラナイ。(Aハ任意)

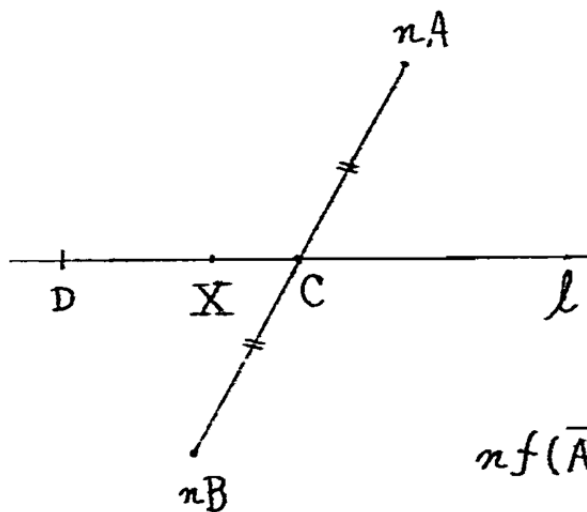


((\mathcal{R} デハ中点ノ性質 = ヨリ直
 線カ定義出来ル。 \mathcal{R} ニ於
 ケル連続函数 [実数值ヲ取
 ル函数] が \mathcal{R} 内ノ任意ノ
 直線 l 上ニ於テ konvex
 ナラバ、之レヲ konvex
 デアレト云フ。))

証明ハA, B ノ重心ヲCトシテ圖 = ヨリ工夫サレタシ。

次ニ重心ハ更ニ結合ノ法則 (ii) ヲ満足スルモノト假定ス
 ル。シカラバ \mathcal{R} ハ線状空間トナリ、重心ハ普通ノVektor
 空間ニ於ケル重心ト同ジモノトナル。

此ノ場合ニハ $f(\overline{AX})$ ハ konvex ナルノミナラズ
微分可能 (任意ノ直線上デ) トナル。 ((証明ニハ konvex



ナルコトノ証明ト同様ニ
 考ヘ方ヲシテ、若シモC
 ノ两侧ニ於ケル微係数が
 一致セス時ニハ、 n ヲ充
 分大ナル自然数トレバ、

$$nf(\overline{AX}) + nf(\overline{BX}) + f(DX)$$

(Dハl上ノ点) ハCニ於テ最小ト

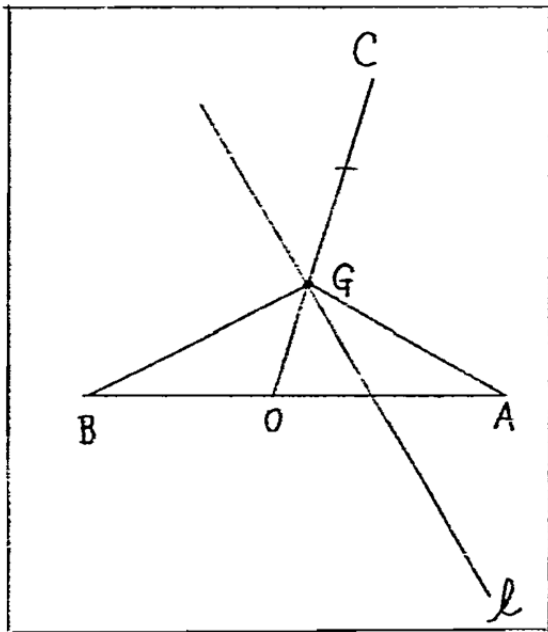
ナリ、 nA, nB, D ノ重心ガCニアルコトトナツテ不都合デ

アルゴトヲ示セバヨイ))

$f =$ 関スル函数方程式 \mathcal{R} ハ線状空間デアルカタ

点ハ Vektor (原点ヲ決定シテ) = ヨツテ表ハサレル。故
 = 此処デアハ点ノ代リ = Vektor 記号 φ, ψ 等ヲ用ヒル。以
 上ノスベテノコトカラ $f(\varphi)$ ハ次ノ函数方程式ヲ満足セネバ
 ナラナイ。[$f(\varphi)$ ハ $f(\overrightarrow{OX})$ ヲ意味スル]

$$f(\varphi + \psi) + f(\varphi - \psi) = 2\{f(\varphi) + f(\psi)\}$$



[証明] $\varphi = \overrightarrow{OA}, \psi = \overrightarrow{OG}$,

$-\varphi = \overrightarrow{OB}$, トスレバ

$$f(AG) + f(BG)$$

$$= 2f(OG) + f(OA) + f(OB)$$

ナルコトヲ証明スレバヨイ。

ソレ = ハ

$$f(AG) + f(BG) - 2f(OG)$$

ハ G が如何 = 動イテモ一定

ナルコトヲ証明スレバヨイ。

今 $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ トスレバ, G ハ A, B, C, 重心デアルト
 同時 = $2 \cdot 0$ 及ビ C, 重心デアル。故 = $f(AX) + f(BX) + f(CX)$
 及ビ $f(CX) + 2f(OX)$ ハ [同時 =] G = 於ケル 微係數
 (G ヲ通ル任意ノ直線 $l =$ 沿フテ) が零デアル。故 = ソノ差
 $f(AX) + f(BX) - 2f(OX)$ ハ G = 於イテ 微係數 が零トナ
 ル。所ガ G ハ 任意デアルカラ $f(AX) + f(BX) - 2f(OX)$
 ハ 如何ナル直線上デアモ 常 = 微係數 が零 即チ 常数デアル。

ℝノ構造 次 $f(r) = ar^2$ ナルコトヲ証明スル。

ソレハ問題ヲ一直線上ニカザル。カクスレバ此ノ問題ハ
“實數ニツイテ算術平均ヲ夾ムルマウナ確率函数ヲ求メヨ!”
トイフコトニナル。之レハ上ノ結果ヲ應用スレバ x, y ナ実
數トシテ函数方程式

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\{f(x) + f(y)\}$$

ヲ解ケトイフコトニナルカラ容易ニ $f(r) = ar^2$ ナ得ル。所
ガ \mathbb{R} ハ空間 \mathbb{R} ノ距離デアルカラ、我々ハ \mathbb{R} ノ距離
 $|\varphi - \varphi'|$ ニツイテノ函数方程式

$$|\varphi + \varphi'|^2 + |\varphi - \varphi'|^2 = 2\{|\varphi|^2 + |\varphi'|^2\}$$

ヲ得ル。之レハ *J. v. Neumann* ガ *Hilbert* 空間ヲ
特徴ヅケルタメノ距離ニ関スル條件デアル。上ノ式ニ於テ
 φ ノ代リニ $\varphi + \varphi'$ 、及ビ $\varphi - \varphi'$ ナ置イタモノヲ相減ツ、
 $|\varphi + \varphi'|^2 - |\varphi - \varphi'|^2 = 4\varphi(\varphi, \varphi')$ トオケバ、 $\varphi(\varphi, \varphi')$
ハ $\varphi = \text{ツイテモ}$ $\varphi' = \text{ツイテモ}$ linear デ $\varphi, \varphi' = \text{ツキ}$ 對
稱 $[\varphi, \varphi', \text{Skalares Produkt}]$ トナリ

$$\varphi(\varphi, \varphi) = |\varphi|^2$$

ヲ得ル。カクテ \mathbb{R} ハ廣義ノ *Euclid* 空間ナルコトガ証
明サレタ。