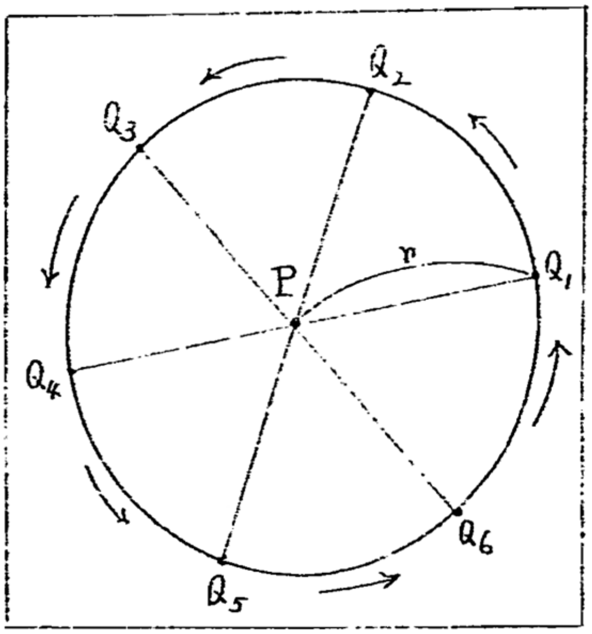
267. 函數方程式 $\sum_{\nu=0}^{n-1} f(z+e^{\frac{2\nu\pi}{n}i}\zeta)=nf(z)$ ニ就イテ

角谷静夫，南雲道夫（阪大）

(x,y) 平面デ定義サレタ連続函数 $f(x,y)$ デ，次ノ性質ヲ有スルモノハ何カ？

"P ヲ (x,y) 平面ノ任意ノ一点トシ，P ヲ中心トシテ任意ノ半径 r デ円ヲ画キ，ソノ周ヲ n 等分スル n 個ノ点ヲ $Q_1, Q_2, \text{------}, Q_n$ トスル時，常ニ

$$f(P)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(Q_\nu)."$$



今 (x,y) 平面ノ点ヲ複素数ヲ用ヒテ表ハセバ，此ノ問題ハ"函数方程式

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(z+\omega^\nu\zeta)=nf(z)$$

$$\left[\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}\right]$$

ヲ解ケ" ト云フコトニナル。但シ $f(z)$ ハ實数値ヲ取ルモノトスル。

先ヅ $\zeta=re^{i\theta}$ トシテ，θ ニツキ 0 カラ $\frac{2\pi}{n}$ マデ積分スレバ

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} f(z+\omega^\nu re^{i\theta})d\theta=\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})d\theta$$

ナルニヨリ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})d\theta=f(z).$$

所ガ r モ z モ任意デアルカラ $f(z)$ ハ (x,y) ノ調和函数デアル。従ッテ

$$f(z)=\Re\{F(z)\}$$

ナル正則函数 $F(z)$ ガ存在スル。故ニ

$$\Re\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}F(z+\omega^\nu \zeta)-nF(z)\right\}=0.$$

之ハ (z,ζ) ノ正則函数ノ實数部分デアルカラ

$$\sum_{\nu=0}^{n}F(z+\omega^\nu \zeta)-nF(z)=iC \ (C\text{ ハ實數}).$$

$\zeta=0$ トスレバ，$C=0$．即チ

$$\sum_{\nu=0}^{n}F(z+\omega^\nu \zeta)=nF(z).$$

$F(z+\omega^\nu \zeta)$ ヲ ζ ノ冪級数 (*Bekikyûsû*) ニ展開シテ両辺ヲ比較スレバ,

$$\frac{d^n}{dz^n}F(z)=0,$$

ヲ得ル。 故ニ $F(z)$ ハ高々 $n-1$ 次ノ有理整函數デアル。

従ッテ

$$f(z)=\mathcal{R}\cdot\left\{a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots\cdots+a_n\right\}.$$

之ガ解ニナルコトハ明ラカデアル。

以上ハ何処カノ教科書ノ演習問題ニデモアリソウナ問題デ，新ラシイ研究トシテ発表スベキ程ノモノデモナサ相ニモ思ハレル。

次ニ此ノ問題ト見掛ケガ同ジヤウナ幾何学的ナ問題ヲ提出シテ諸彦ノ御教示ヲ仰ギタイ。

即チ Spherometer トイフ器機ハれんずノ如キ球面ノ曲率半径ヲ見出スモノデアルガ，之ハ正三角形ノ頂点ニ尖ッタ脚先ガアリ，ソノ重心ニ於ケルソノ面（正三角形ヲ含ム平面）ノ垂直線上ヲ動ク点ノ位置（点ガれんずニ触レル位置ガ平面カラノ距離ヲ知ル）ニヨッテ曲率ヲ計算スルモノデアル。ソコデ今コノ器機ヲ或ル曲面上ノ何処ニ置イテモ，ソノ曲率ガ零トシテ計ラレルトキハ，果シテコノ曲面ハ平面デアラウカ？ 幾何学的ニイヘバ，曲面上ノ三点ガ正三角形ノ頂点ナルトキ，ソノ重心モ亦必ズ曲面上ニアレバ，コノ曲面ハ平面デアロウカ？ 但シ正三角形ノ辺ノ長サハ一定ナル場合，及ビ之レガ任意ノ場合トニツノ相異ナル問題ヲ生ズル。此ノ問題ハ更ニ種々ニ擴張サレルデアロウ。

―― 以上 ――