266. 函數方程式ニ就テ, I

福原 満洲雄（北大）

§1. カウイフ表題ヲ出シタ所デ微分方程式ノ *Hatake* ヲ出ヨウトシテヰルノデハナイ。微分方程式ヲ研究スルノニソノ中ダケデ *Osamari* ヲツケヨウトスルノハ無理ナ話デ，自然ニ函数方程式マデ手ヲ *nobasu* ヤウニナルノデアル。

前ニ *Marcel Winants* ノ論文ヲ擧ゲテ（５６号）ソレニ就イテ書カウト思ッタノデアルが，餘リ日が經チ過ギテ氣が抜ケテシマッタノデソノ儘ニナッテヰル。言ヒタオッタコトハ逐次近似法ヲ *méthode merveilleuse* ナドト書イテヰルカラ，サウイフ問題ナラモット樂ニ，同等又ハソレ以上ノ結果が得ラレル方法がアルトイフコトデアッタ。逐次近似法ハ今デモ盛ニ使ハレテヰル。

例ヘバ

T. *Peyovitch, Sur la méthode des approximations successives d'équations différentielles (Publ. math. Univ. Belgrade). Sur la solution asymptotique d'une équation* différentielle du premier ordre (Ibid.)

ナドモサウデアルガ，解ノ存在定理ヲ使フ方ガ逐次近似値ノ収斂性ナドニ氣ヲ使フ必要ガナイノデ，ソレダケデモ樂ニナル筈デアル。解ノ存在ト單独性トハ問題ガ自ラ別デアル。此ノ二ツヲ同時ニ出サウトスル，モット精密ニ言ヘバカウイフ解ガ存在シテ唯一ツデアルトイフ形ノ結果ヲ出サウトスルトヨイ結果ニナラナイ。存在定理ノ方ハ解ガ満足スベキ條件ヲ強クシタ方ガヨイ結果ニナルガ單独性ノ方ハ反對ニ解ガ満足スベキ條件ヲ弱クシタ方ガヨイ結果ニナルカラデアル。

ソレナラバ，ドウイフ存在定理ガアルノカトイフコトニナルノデアルガ，常微分方程式ナラバ，拙著，常微分方程式論(岩波講座)定理27デアル。此ノ定理ハ有限次元ノ空間ニ於ケル不動点ノ存在定理カラ導カレタモノデ，此ノ者ヘハ今デハ決シテ珍ラシイコトデハナイ。ソレデアルカラ不動点ノ存在定理カラドウイフ道筋デ函数方程式ニ関スル解ノ存在定理ガ導カレルカヲ此処ニ述ベヨウトハ思ハナイ。ソレヨリコノヤウニシテ得ラレタ解ノ存在定理ノ利用價値ニ注目シタイノデアル。

§2. 先ヅ簡單ナ定義カラ始メル。

$a \leqq t \leqq b$ デ連続ナ二ツノ函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ガアルトキ

$$\rho(\varphi, \psi) = \max_{a \leqq t \leqq b} \left\{ |\varphi(t) - \psi(t)| \right\}$$

ヲ二ツノ函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ノ間ノ距離ト名ヅケル。但シ函数ノ取ル値ハ複素数デモ或ハ又 n 次元ノ空間ノ Vector デアッテモヨイ。ソノ時ニハ絶對値ハ Vector ノ長サトイフ意味ニ解釋スル、距離ガ定義サレレバ $a \leqq t \leqq b$ デ連續ナ函数ノ集合ニ点集合ニ関スル定義ヲソノママ適用スルコトガ出來ルカラ，其等ハ一々述ベナイ。

例ヘバ F ガ $a \leqq t \leqq b$ デ連續ナ函数カラ成ル或集合デアルトキ，F ニ属スルスベテノ函数 $f(t)$ ニ對シテ $|f(t)| \leqq M$ デアルヤウナ有限ナ数 M ガ存在スルナラバ，F ハ有界デアルトイフ。F ガ次ノ性質ヲ満タストキ星形デアルト云フ。

$f(t)$ ガ F ノ界点ナラバ $\lambda f(t)$ ハ $0 \leqq \lambda < 1$ ノ時 F ノ内点，$\lambda > 1$ ノ時 F ノ外点デアル。

$\mathrm{F}\left(x, [y(t)]_a^b\right)$ ナル記号ハ x ト，$a \leqq t \leqq b$ デ定義サレタ函数 $y(t)$ トニ依ッテ一ツノ値 F（一般ニ n 次元空間ノ Vector）ガ決定サレルコトヲ表ハス。Y ヲ $a \leqq t \leqq b$ デ連續ナ函数ノ或集合トシ，I_a^b デ $a \leqq t \leqq b$ ナル區間ヲ表ハシタ時，$\mathrm{F}\left(x, [y(t)]_a^b\right)$ ガ $(\mathrm{I}_a^b, \mathrm{Y})$ デ連續デアルトハ次ノ意味デアル。

I_a^b ニ属スル一ツノ数 x_1，Y ニ属スル一ツノ函数 $y_1(t)$ 及ビ正ノ数 ε ガ與ヘラレタトキ，正ノ数 δ ヲ十分ニ小サク取ッテ

$$|x - x_1| < \delta, \qquad \rho(y, y_1) < \delta$$

デアルヤウナ I_a^b ニ属スル x，Y ニ属スル $y(t)$ ニ對シテ

$$\left|F\left(x,\left[y(t)\right]_a^b\right)-F\left(x_1,\left[y_1(t)\right]_a^b\right)\right|<\varepsilon$$

ガ成立スルヤウニ出來ル。

此ノ定義ヲ使ヘバ先ニ引用シタ定理27ハモット一般ニ次ノ形ニ述ベラレル。

存在定理1. 「$a\leqq t\leqq b$ デ連續ナ函數ノ或集合Yガ星形ノ，有界ナ閉集合デ，$F\left(x,\left[y(t)\right]_a^b\right)$ ガ (I_a^b, Y) デ連續デ、ソレヲxノ函數ト考ヘタトキ（$a\leqq x\leqq b$ デ連續トナルコトハ明ラカデアル）Yニ屬シ，且ツ $\left\{F\left(x\left[y(t)\right]_a^b\right)\right\}$ ナル函數族ガ $a\leqq x\leqq b$ デ同ジ程度ニ連續ナラバ函數方程式

$$y(x)=F\left(x,\left[y(t)\right]_a^b\right)$$

ハ解ヲ持ツ」

若シ考ヘル區間ガ $a<t<b$ ナラバ（a, b ハ有限デナクテモヨイ），$a<t<b$ ニ含マレル有界ナ閉區間デYガ有界トスレバヨイ。

尚Yガ $a\leqq t\leqq b$ デ連續ナ函數ヲ全部含ム場合ハ北大理學部紀要（Ser. I, Vol. II, 22—25頁）ニ出テヰル。

§3. 存在定理1ヲ種々ナ方向ニ拡張スルコトガ出來ルガ，ソレハ暫ク措イテ，$\left\{F\left(x,\left[y(t)\right]_a^b\right)\right\}$ ガ同程度ニ連續トイフ假定ヲ考ヘテ見ル。コレハ実ニ大キナ假定デ，簡單ナ函數方程式ノ場合ニモ，コノ條件ヲ滿タサナイモノハ幾ラモアル。ソレニモ拘ラズ微分方程式，積分方程式ノ場合ニ

ハ満足サレル。ソコガ見様ニ依ッテハ omosiroi ノデアル。余リ一般ナ場合ヲ考ヘレバ bon'yari シタ結果シカ得ラレナイデアラウ。微分方程式，積分方程式ニ関スル理論ヲマトメテ見タイトイフ自分ノ希望ニ對シテハ其レ等ガ満足シ，其ノ他ノ方程式ガ満足シナイ重要ナ性質ヲ見ツケルコトハ大切ナコトデアル。若シサウイフ性質ガナカッタナラ，其レ等ダケヲ一纏メニシヨウトスル企テハ大シタ意味ヲ持タナクナルカラデアル。故ニ強イ假定ダカラト言ッテ強引ニ除ク必要ハナイデアラウ、尤モ簡單ニ此ノ條件ガ他ノモット弱イ條件デ置換ヘラレルナラバ，ソノ方ガヨイニキマッテヰルガ。

ソレヨリ問題ニスベキハ $F\left(x,\left[y(t)\right]_a^b\right)$ ガ Y ニ属スルトイフ假定ノ方デアル。此ノ條件ハモット緩イ條件デ置換ヘナケレバ madui。例ヘバ Fredholm ノ積分方程式

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt+f(x)$$

ニ於イテ $F\left(x,\left[y(t)\right]_a^b\right)\in Y$ ナル假定ハ λ ガ小サイトキニ満足サレルニ過ギナイカラデアル。依ッテ此ノ假定ヲドウイフ風ニ緩メルコトガ出來ルカヲ次ニ述ベヨウト思フ。