

262. 函数ノ單葉性, III

佐藤徳意(北大)

IIデハ否定的ノ結果ノミヲ述べマシテ, 自分ノ勘ノ悪サ
バカリヲ示シ, 一寸モ建設的方面ニ興リマセンデシタ。今回
ハ(I)ヲ考へ直シテ得ラレルレツノ結果ヲ述べマセウ。

定理Aニ似タヨク知ラレタ定理ニ
定理B.

〆 $|z| < 1$ デ

$$f(z) = z + \dots$$

ハ正則ナ函数デアルトキ, $|z| < 1$ ノ原点ニ関シテ星形ヲ單
葉ニ寫像スルタメニ必要ニシテ充分ナル條件ハ

$$R\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad |z| < 1$$

デアロコトナリ。”

定理 C

“ $|z| < 1$ デ

$$f(z) = z + \dots$$

ハ正則ナ函数デアルトキ, $|z| < 1$ ヲ凸状領域 = 單葉 = 寫像ス
ルタメ = 必要 = シテ充分ナル條件ハ

$$R\left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \quad |z| < 1$$

デアロコトナリ。”

ガアル。更ニ Bノ擴張トシテ Špaček ノ得タ

定理 D.

“ $|z| < 1$ デ

$$f(z) = z + \dots$$

ガ正則デ

$$R\left(e^{i\alpha} z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad |z| < 1$$

(α ハ $\cos \alpha > 0$ ナル實數)

デアルトキハ $|z| < 1$ デ $f(z)$ ハ單葉デアル。”

ガアルガ, 此等ノ定理 A, B, C, D ヲ系トシテミルコトノ出來
ル廣イ定理ヲ欲シイ。ソレニハ (I) ヲ次ノ條件 (1), (2), (3) デ
置キ換ヘルコトニヨリ

定理 3.

“單連結ナ領域 D デ正則ナ函数 $f(z)$ ガ D デ單葉デアル
タメ = 必要 = シテ充分ナル條件ハ

(1) D で $f'(z) \neq 0$ デアル。

(2) D の値域 Ω は単連結デアル。

(3) D の縁ト Ω の縁トが對應スル。

コトデアル。"

ヲ得ル。