

261. 奇数次單葉冪級數ノ切断ノ單葉半徑
ニ就イテ, I

城 憲 三 (阪大工)

$$(1) \varphi(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1} + \dots$$

ヲ $|z| < 1$ デ正則單葉トスルトキ Fejér ハ次ノ定理ノ成立
スルコトヲ *Journal of London Math. Soc.*, 1933 (Vol. 8)
ニ陳ベテキル。

定理 $\varphi(z)$ ハ次ノ條件ヲ満足スルモノトスル。

1° スベテノ係數 a_{2n+1} ($n=1, 2, \dots$) ハ
實數,

2° $|z| < 1$ ノ寫像領域ハ虚軸ノ方向 = convex.

コノトキハ (1) ノスベテノ切断

$$\rho_{2n+1}(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

ハ $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉デアアル。

コノ定理ノ証明ハ Fejér ノ上記ノ論文ニハ書イテキ
ナイ。彼ハソノ証明ヲ後日發表スル旨ヲ約シテキルケレドモ
未ダソノ發表ガナイヌデアアル。

筆者ハ 2° ノ條件ナシニ 1° ノ條件ダケデ Fejér ト同
シ結果ヲ得ルコトガ出來タ。

本論文ノ目的ハ之レヲ述バルニアル。カクシテ係數ガ實數ナ
ルトキニハ奇数次ノ單葉冪級數ノ切断ノ單葉半徑ノ定理ハ完
成サレタルコトニナル。^{*}

§1. 定理

(1) $|z| < 1$ デ正則單葉 = ヲテ條件 1° が満足サレテキル
 トスル。コノトキ (1) ノスベテノ切斷 $\Delta_{2n+1}(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) ハ $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單
 葉デアル。特ニ $\varphi(z) = \frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + \dots$ ノ最初二項
 ノミノ切斷ヲ考フルコト = ヲリ單葉半徑 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ハ之レ以上大キ
 クスルコトハ許サレナイ。

豫備定理 1. $|z_1|, |z_2| < 1$ ナルトキ

$$(2) \quad \left| \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \left(\frac{1 - |z_1|^2}{1 + |z_1|^2} \right)^2 \cdot \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2|}{(|z_1 - z_2| + |1 - \bar{z}_1 z_2|)^2}$$

証.

$$(3) \quad h(\zeta) \equiv \frac{-\varphi\left(\frac{-\zeta + z_1}{1 - \bar{z}_1 \zeta}\right) + \varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)(1 - |z_1|^2)} = \zeta + \dots$$

ヲ考ヘルト, $h(\zeta)$ ハ $|\zeta| < 1$ デ正則單葉トナル, 従ツテ

$$(4) \quad |h(\zeta)| \geq \frac{|\zeta|}{(1 + |\zeta|)^2}, \quad |\zeta| < 1.$$

*) 係数が一般ニ複素数ナルトキ = モ, $z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + a_7 z^7$ ヲ
 除キ他ノスベテノ切斷ハ $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナルコトハ直チニ示
 セル。シカシ $z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + a_7 z^7$ ノ $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナルコト
 ノ証明モ必ず出來ル自信ヲ得タ。コノタメニハ $|a_7|, |a_5|$ 等ヲ
 Levin ノ結果ヨリモ Scharf = 評價シテ適用スル (Levin,
 Proceedings of the London Mathematical Society,
 Vol. 39, p. 467 (1935) 参照)。コレ等ノ結果ノ發表ハ次回 = エツリ
 タイ。コノデハ係数が実数ナルトキノミヲ考ヘル。

$$\text{今 } z_2 = \frac{-\zeta + z_1}{1 - \bar{z}_1 \zeta} \quad \text{トオケバ } |z_2| < 1 = \text{シテ } \zeta = \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \quad \text{ト}$$

ナルカラ (3) カラ

$$h\left(\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right) = \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{\varphi'(z_1)(1 - |z_1|^2)}.$$

(4) ヲ用ヒテ

$$\left| h\left(\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right) \right| = \left| \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{\varphi'(z_1)(1 - |z_1|^2)} \right| \geq \frac{\left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{\left(1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|\right)^2}.$$

$$\text{又 } |\varphi'(z_1)| \geq \frac{1 - |z_1|^2}{(1 + |z_1|^2)^2} \quad \text{デアルカラ 上式} = \text{代入シテ}$$

$$\left| \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \left(\frac{1 - |z_1|^2}{1 + |z_1|^2} \right)^2 \cdot \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2|}{(|z_1 - z_2| + |1 - \bar{z}_1 z_2|)^2}$$

コノ結果ノ等号ハ $z_2 \neq z_1$ トオキタルトキニ成立スル。

(Grunskyノ理論ニヨツテ、コノ豫備定理ハ非常ニ擴張シタモノニ出来ルケレドモ、以下ニ必要デアルカラ、コノデハ省略スル)

豫備定理 2. (Dieudonné)

$$(5) \quad |a_{2n+1}| + |a_{2n-1}| \leq 2, \quad (n=1, 2, \dots, a_1=1).$$

(注意): 係数 a_{2n+1} ($n=1, 2, \dots$) が複素数ノトキハ $|a_7|, |a_9|, \dots$ 等ノ相當係数ヲ $1 = \text{近イ値}$ デ評價シタル者自身ノ結果ヲ用ヒル。コレニ相當シメコトガ Szegőノヌツタ奇数次デナイ一般ノ單葉冪級数ノ場合ノ定理ノ証明ノト

キ = エアル ($|a_4|, |a_5|$ ノ相當ヨイ評價式).

但シ相當 = Scharf = 限レバヨイノテ最上ノ結果 = 到ラナクテ済ム。(上ノ $|a_7|$ 等ノ評價ノ方法ハ Ozaki 氏等ノマラレタ方法ト似タ方法ヲマレル —— Grandjot ノ方法).

Levin ノ得タ結果 $|a_7| < 1, 25, |a_9| < 1, 38$ 等ヲ直接利用シタノデハ失敗 = 帰スル。但シ相當大ナル n = 對シ重要ナル Levin ノ定理 $|a_{2n+1}| < 3, 4$ ハ勿論用ヒル。コノコトガ筆者ノコノ定理ヲ問題 = スル動機トナツテキルモノデアアル。

§ 2. 定理ノ証明

$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, z_2 = \frac{x}{\sqrt{3}}, |x| = 1$ トスレバ (2) ノ右辺:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - |z_1|^2}{1 + |z_1|^2} \right)^2 \cdot \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2|}{(|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|)^2} &= \left(\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} \right)^2 \cdot \frac{|1 - \frac{x}{3}|}{\left(|1 - \frac{x}{3}| + \frac{|1-x|}{\sqrt{3}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left| 1 - \frac{x}{3} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} \left| 1 - x \right| + \frac{1}{3} \left| \frac{(1-x)^2}{1 - \frac{x}{3}} \right|}. \end{aligned}$$

$z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1}$ が $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ テ單葉ナルコトヲ示ス = ハ $|z_1| = |z_2| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ナル如キ任意ノ $z_1, z_2 =$ 對シ

$$(6) \quad \left| \frac{\mathcal{P}(z_1) - \mathcal{P}(z_2)}{z_1 - z_2} \right| > \left| \sum_{\nu=-n+1}^{\infty} a_{2\nu+1} \frac{z_1^{2\nu+1} - z_2^{2\nu+1}}{z_1 - z_2} \right|$$

ナルコトヲ示セバヨイ。且ツ一般性ヲ失ハズ、 $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, z_2 = \frac{x}{\sqrt{3}}, |x| = 1$ ト考ヘテヨイ。

先ツ $n \geq 3$ = 對シ (6)ノ 眞ナルコトヲ 述ベヨウ。

$$\left| \sum_{\nu=4}^{\infty} a_{2\nu+1} \frac{x_1^{2\nu+1} - x_2^{2\nu+1}}{x_1 - x_2} \right| \leq \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu} \cdot \left| \frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x} \right|$$

$$\leq \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu} (2\nu+1).$$

而シテ 豫備定理 2ヨリ 勿論 $|a_{2n+1}| \leq 2$ ナルカラ

$$(7) \quad \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu} (2\nu+1) \leq \sum_{\nu=4}^8 \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu} (2\nu+1) + \sum_{\nu=9}^{\infty} \frac{2(2\nu+1)}{3^\nu}.$$

右辺ノ 最初ノ $\sum_{\nu=4}^8$ = 於テ 予備定理 2ヲ 順次用ヒテ 行クノデア

ルガ, 先ツ $|a_{17}| \leq 2 - |a_{15}| = \exists$ リ

$$\sum_{\nu=4}^8 \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu} (2\nu+1) \leq \frac{34}{3^8} + |a_{15}| \cdot \left(\frac{15}{3^7} - \frac{17}{3^8} \right) + \frac{13 \cdot |a_{13}|}{3^6} + \frac{11 \cdot |a_{11}|}{3^5} + \frac{9 \cdot |a_9|}{3^4}$$

$$= \frac{34}{3^8} + \frac{28}{3^8} |a_{15}| + \frac{13 \cdot |a_{13}|}{3^6} + \frac{11 \cdot |a_{11}|}{3^5} + \frac{9 \cdot |a_9|}{3^4}$$

同様 = 考ヘテ

$$\leq \frac{34}{3^8} + \frac{56}{3^8} + |a_{13}| \cdot \left(\frac{13}{3^6} - \frac{28}{3^8} \right) + \frac{11 \cdot |a_{11}|}{3^5} + \frac{9 \cdot |a_9|}{3^4}$$

$$= \frac{90}{3^8} + \frac{89}{3^8} |a_{13}| + \frac{11 \cdot |a_{11}|}{3^5} + \frac{9 \cdot |a_9|}{3^4}$$

$$\leq \frac{90}{3^8} + \frac{178}{3^8} + |a_{11}| \cdot \left(\frac{11}{3^5} - \frac{89}{3^8} \right) + \frac{9 \cdot |a_9|}{3^4}$$

$$= \frac{268}{3^8} + \frac{208}{3^8} |a_{11}| + \frac{9 \cdot |a_9|}{3^4}$$

$$\leq \frac{684}{3^8} + |a_9| \cdot \left(\frac{9}{3^4} - \frac{208}{3^8} \right)$$

$$= \frac{684}{3^8} + \frac{521}{3^8} \cdot |a_9|$$

$|a_9| < 1, 38$ デアルカラ

$$\sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}} (2\nu+1) < \frac{684}{3^8} + \frac{1,38 \cdot 521}{3^8} = \frac{1402,98}{3^8} < 0,214.$$

而シテ $\sum_{\nu=9}^{\infty} \frac{2(2\nu+1)}{3^{\nu}} < 0,003.$

依テ (7) ヨリ $n \geq 3$ = 對シ,

$$(8) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}} (2\nu+1) < 0,214 + 0,003 = 0,217 < 0,22.$$

a) 先ツ $|1-x| \leq 0,26$ ナルトキハ (8) = ヨツテ

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left|1-\frac{x}{3}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}|1-x| + \frac{1}{3} \left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right|} > 0,22$$

が成立スルコトヲ示サユ。

$$\left|1-\frac{x}{3}\right| \leq \frac{2+|1-x|}{3} \leq \frac{2+0,26}{3},$$

$$\left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right| \leq \frac{(0,26)^2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{0,0676}{\frac{2}{3}}$$

デアルカラ

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left|1-\frac{x}{3}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}|1-x| + \frac{1}{3} \left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right|} &\geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{2+0,26}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0,26 + \frac{0,0676}{2}} \\ &> \frac{3}{2 \cdot 6,5242} \\ &= \frac{3}{13,0484} > 0,22. \end{aligned}$$

2) 次 = $|1-x| > 0,26$ + ルトキ = (6) , 成立スルコト

ヲ見ヨウ。コノトキハ

$$\sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}} \left| \frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x} \right| < \frac{2}{|1-x|} \cdot \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}}$$

$$< \frac{2}{|1-x|} \cdot \left\{ \sum_{\nu=4}^8 \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}} + \sum_{\nu=9}^{\infty} \frac{2}{3^{\nu}} \right\}.$$

而シテ又, 予備定理2ヲ順次用ヒテ

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=4}^8 \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}} &\leq \frac{2}{3^8} + |a_{15}| \cdot \left(\frac{1}{3^7} - \frac{1}{3^8} \right) + \frac{|a_{13}|}{3^6} + \frac{|a_{11}|}{3^5} + \frac{|a_9|}{3^4} \\ &= \frac{2}{3^8} + \frac{2}{3^8} |a_{15}| + \frac{|a_{13}|}{3^6} + \frac{|a_{11}|}{3^5} + \frac{|a_9|}{3^4} \\ &\leq \frac{2}{3^8} + \frac{4}{3^8} + |a_{13}| \cdot \left(\frac{1}{3^6} - \frac{2}{3^8} \right) + \frac{|a_{11}|}{3^5} + \frac{|a_9|}{3^4} \\ &= \frac{6}{3^8} + \frac{7}{3^8} \cdot |a_{13}| + \frac{|a_{11}|}{3^5} + \frac{|a_9|}{3^4} \\ &\leq \frac{20}{3^8} + |a_{11}| \cdot \left(\frac{1}{3^5} - \frac{7}{3^8} \right) + \frac{|a_9|}{3^4} \\ &= \frac{20}{3^8} + \frac{20}{3^8} \cdot |a_{11}| + \frac{|a_9|}{3^4} \\ &\leq \frac{60}{3^8} + |a_9| \cdot \left(\frac{1}{3^4} - \frac{20}{3^8} \right) \\ &= \frac{60}{3^8} + \frac{|a_9| \cdot 61}{3^8} \\ &\leq \frac{60 + 61 \cdot 1,38}{3^8} \\ &= \frac{60 + 84,18}{3^8} \end{aligned}$$

$$= \frac{144,18}{3^8} < 0,02198.$$

而シテ

$$\sum_{\nu=9}^{\infty} \frac{2}{3^{\nu}} < 0,00016.$$

$$\begin{aligned} \text{故} = \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}} \left| \frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x} \right| &< \frac{2}{|1-x|} \cdot \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}} \\ &< (0,02198 + 0,00016) \cdot \frac{2}{|1-x|} < 0,02214 \cdot \frac{2}{|1-x|}. \end{aligned}$$

依ツテ $n \geq 3$ = 對シ

$$(9) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}} \left| \frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x} \right| < 0,02214 \cdot \frac{2}{|1-x|}.$$

從ツテ (6) が成立スルヲ $x = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left| 1-\frac{x}{3} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} \left| 1-x \right| + \frac{1}{3} \left| \frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}} \right|} > \frac{2}{|1-x|} \cdot 0,02214.$$

ナラバヨシ。シカシ上式ハ成立スル、何トナレバコノ爲メ =
ハ

$$\left| \frac{1-\frac{x}{3}}{1-x} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \left| \frac{1-x}{1-\frac{x}{3}} \right| < \frac{1}{8 \cdot 0,02214} = 5,6 \dots \dots$$

ナレヲ要スルガ $|1-x| > 0,26$ ナルコト, $\left| \frac{1-\frac{x}{3}}{1-x} \right|$ ハ $(0, \pi)$ デ

$\arg x$ ノ 減少函数ナルコト及ビ $|1-x| = 0,26$ ナルトキハ

$\left| 1-\frac{x}{3} \right| < 1$ デアルコトヲ注意スレバ

$$\left| \frac{1-x}{1-\frac{x}{3}} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \left| \frac{1-x}{1-\frac{x}{3}} \right| < \frac{1}{0,26} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1+\frac{1}{3}}$$

$$< 3,85 + 1,155 + 0,5 = 5,505 < 5,6$$

トナルカラデアロ。

之ヲ $z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1}$ ($n \geq 3$) ノ $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ單葉ナルコトガ分ツタ。次ニ $z + a_3 z^3$, $z + a_3 z^3 + a_5 z^5$ ノ $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ單葉ナルコトヲ示サウ。之等ノ証明ハ a_3, a_5 ガ複素数ナルトキニモ成立スル。

§ 3. $z + a_3 z^3$ ノ $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ單葉ナルコトハ明ラカデア
ル。何者、 $|a_3| \leq 1$ デアルカラ

$$\left| \frac{(z_1 + a_3 z_1^3) - (z_2 + a_3 z_2^3)}{z_1 - z_2} \right| = \left| 1 + a_3 (z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) \right|$$

$$\geq 1 - |a_3| \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \geq 0.$$

次ニ、

$z + a_3 z^3 + a_5 z^5$ ノ $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ單葉ナルコトヲ見ルニハ

$$\Re \left\{ 1 + a_3 (z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) + a_5 (z_1^4 + z_1^3 z_2 + z_1^2 z_2^2 + z_1 z_2^3 + z_2^4) \right\} > 0$$

ナルコトヲ示セバヨイ。

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\varphi}, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\varphi} \quad \text{トオイテヨイカラ} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

上ノ括弧ノ中ノ式ヲ書キ代ヘルト

$$1 + \frac{a_3}{3} (e^{i2\varphi} + 1 + e^{-i2\varphi}) + \frac{a_5}{9} (e^{i4\varphi} + e^{i2\varphi} + 1 + e^{-i2\varphi} + e^{-i4\varphi})$$

$$= 1 + \frac{a_3}{3} (2\cos 2\varphi + 1) + \frac{a_5}{9} (2\cos 4\varphi + 2\cos 2\varphi + 1)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{a_3}{3}(4\cos^2\vartheta - 1) + \frac{a_5}{9}(4\cos^2 2\vartheta - 2 + 4\cos^2\vartheta - 2 + 1) \\
&= 1 + \frac{a_3}{3}(4\cos^2\vartheta - 1) + \frac{a_5}{9}(16\cos^4\vartheta - 12\cos^2\vartheta + 1)
\end{aligned}$$

$\cos^2\vartheta \equiv \lambda$ トオケル $1 \geq \lambda \geq 0 = \text{シテ}$

$$= 1 + \frac{a_3}{3}(4\lambda - 1) + \frac{a_5}{9}(16\lambda^2 - 12\lambda + 1)$$

$$\equiv \psi(\lambda).$$

Löwner = \exists)

$$(10) \quad \begin{cases} a_3 = -\int_0^\infty x(\tau) e^{-\tau} d\tau \equiv x_1 + iy_1, & |x(\tau)| = 1, \\ a_5 = \frac{3}{2} \left[\int_0^\infty x(\tau) e^{-\tau} d\tau \right]^2 - \int_0^\infty x^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau \equiv x_2 + iy_2 \end{cases}$$

トオケル

$$R\psi(\lambda) = 1 + \frac{x_1}{3}(4\lambda - 1) + \frac{x_2}{9}(16\lambda^2 - 12\lambda + 1) \quad (**)$$

$$= \frac{16}{9}x_2\lambda^2 + \left(\frac{4}{3}x_1 - \frac{12}{9}x_2\right)\lambda + 1 - \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{9}.$$

$$= \frac{1}{9} [16x_2\lambda^2 + (12x_1 - 12x_2)\lambda + 9 - 3x_1 + x_2]$$

$$= \frac{1}{9} [x_2(4\lambda)^2 + 3(x_1 - x_2)(4\lambda) + 9 - 3x_1 + x_2]$$

$4\lambda = \xi$ トオケル $0 \leq \xi \leq 4 = \text{シテ}$

$$= \frac{1}{9} [x_2\xi^2 + 3(x_1 - x_2)\xi + 9 - 3x_1 + x_2].$$

** $x_2 = 0$ + ルトケル $R\psi(\lambda) \geq 0, (0 \leq \lambda \leq 1), x_2 \neq 0$ トオケル。

従ッテ $0 \leq \xi \leq 4$ = 對シ

$$\eta = \chi(\xi) \equiv x_2 \xi^2 + 3(x_1 - x_2)\xi + 9 - 3x_1 + x_2 > 0$$

ナラバヨシ。($\eta = \chi(\xi)$ ハ ξ, η - 平面, parabola, 軸
ハ η 軸 = 平行)

I. $x_2 > 0$ ナル場合

$$\chi(0) = 9 - 3x_1 + x_2 > 9 - 3|x_1| + x_2 > 0 \quad (\text{何トナラバ } |x_1| \leq 1)$$

$$\chi(4) = 16x_2 + 12(x_1 - x_2) + 9 - 3x_1 + x_2 = 9x_1 + 5x_2 + 9 > 0$$

(A 上)

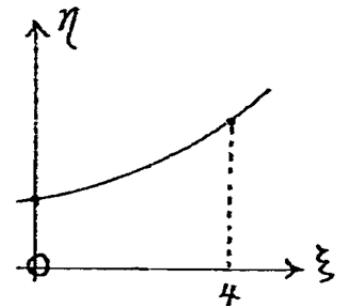
故 =

1° $x_1 \geq x_2$ ナラバ

$$\chi'(\xi) = 2x_2\xi + 3(x_1 - x_2) \geq 0 \quad \text{ナカレバ}$$

$$0 \leq \xi \leq 4 = \text{對シ } \chi(\xi) > 0$$

(第一圖参照)



(第一圖)

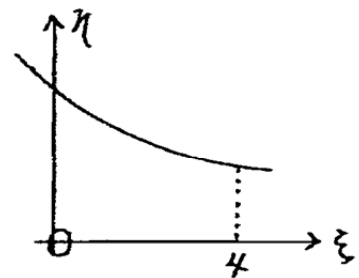
2° $x_1 < x_2$ ナラバ $3x_1 + 5x_2 \leq 0$ ナルトキハ

$$\chi'(0) = 3(x_1 - x_2) < 0,$$

$$\chi'(4) = 8x_2 + 3(x_1 - x_2) = 3x_1 + 5x_2 \leq 0.$$

$$\text{ナカレバ } 0 \leq \xi \leq 4 = \text{對シ}$$

$$\chi(\xi) > 0 \quad (\text{第二圖参照})$$



(第二圖)

$3x_1 + 5x_2 > 0$ ナルトキハ

(II)

$$-\frac{5}{3} < \frac{x_1}{x_2} < 1$$

トナリ

$$\text{Min } \chi(\xi) = \frac{4x_2(9 - 3x_1 + x_2) - 9(x_1 - x_2)^2}{4x_2}$$

$$= \frac{1}{4x_2} [-9x_1^2 + 6x_1x_2 - 5x_2^2 + 36x_2]$$

$$= \frac{1}{4} (6x_1 - 5x_2 + 36) - \frac{9}{4} \frac{x_1^2}{x_2}$$

$6x_1 - 5x_2 + 36 \geq 36 - 6|x_1| - 5|x_2| > 36 - 6 - 10 = 20$ デアルカ
ラ (11) ヲ用ヒ

$$> \frac{20}{4} - \frac{9}{4} |x_1| \cdot \left| \frac{x_1}{x_2} \right| > \frac{20}{4} - \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{3} > 0.$$

故ニヤハリ, $0 \leq \xi \leq 4$ デ $\chi(\xi) > 0$.

II. $x_2 < 0$ ナル場合

ヤハリ $\chi(0) = 9 - 3x_1 + x_2 \geq 9 - 3|x_1| - |x_2| > 0$ ニシテ, 次
節 54 = テ証明スル如ク

$$\chi(4) = 9x_1 + 5x_2 + 9 > 0$$

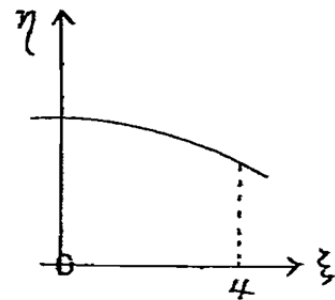
デアアル。

1° $x_1 \leq x_2$ ナラバ

$$\chi'(\xi) = 2x_2\xi + 3(x_1 - x_2) \leq 0 \quad (0 \leq \xi \leq 4)$$

故ニ $0 \leq \xi \leq 4$ デ $\chi(\xi) > 0$.

(第三圖参照)



(第三圖)

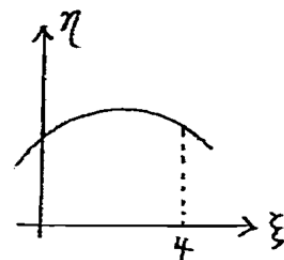
2° $x_1 > x_2$ ナラバ

$$\chi'(\xi) = 2x_2\xi + 3(x_1 - x_2) \geq 0$$

$$\chi'(0) = 3(x_1 - x_2) > 0$$

故ニ $0 \leq \xi \leq 4$ デ $\chi(\xi) > 0$.

(第四圖参照)



(第四圖)

知カラ何レノ場合デモ $0 \leq \xi \leq 4$ デ $\chi(\xi) > 0$ デアル。

§ 4. $9x_1 + 5x_2 + 9 > 0$ ナルコトノ証明.

Löwnerノ式 (10) = ヨツテ不等式 $-9x_1 - 5x_2 < 9$ ノ左
 辺ヲ書き代ハル

$$-9x_1 - 5x_2 = -9x_1 - R \left\{ \frac{15}{2} \left[\int_0^{\infty} x(\tau) e^{-\tau} d\tau \right]^2 - 5 \int_0^{\infty} x^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau \right\},$$

$x(\tau) \equiv x(\tau) + iy(\tau)$ トカケル

$$= -9x_1 - \frac{15}{2} (x_1^2 - y_1^2) + 5 \int_0^{\infty} [x^2(\tau) - y^2(\tau)] e^{-2\tau} d\tau$$

$$= -\frac{15}{2} x_1^2 - 9x_1 + \frac{15}{2} y_1^2 + 5 \int_0^{\infty} [x^2(\tau) - y^2(\tau)] e^{-2\tau} d\tau$$

$$-\frac{15}{2} x_1^2 - 9x_1 \leq \frac{81}{30} \Rightarrow \text{アナルカヲ}$$

$$\leq \frac{81}{30} + \frac{15}{2} \left(\int_0^{\infty} y(\tau) e^{-\tau} d\tau \right)^2 + 5 \int_0^{\infty} [1 - 2y^2(\tau)] e^{-2\tau} d\tau$$

$$= \frac{81}{30} + 5 \int_0^{\infty} e^{-2\tau} d\tau + \frac{15}{2} \left(\int_0^{\infty} y(\tau) e^{-\tau} d\tau \right)^2 - 10 \int_0^{\infty} y^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau$$

$$\leq \frac{81}{30} + \frac{5}{2} + \int_0^{\infty} \left[\frac{15}{2} e^{-\tau} - 10 e^{-2\tau} \right] y^2(\tau) d\tau$$

$$= \frac{81}{30} + \frac{5}{2} - \int_0^{\infty} \left[\frac{15}{2} - 10 e^{-\tau} \right] y^2(\tau) d(e^{-\tau})$$

$$= \frac{81}{30} + \frac{5}{2} + \int_0^1 \left(\frac{15}{2} - 10x \right) y^2(-\log x) dx$$

$$= \frac{81}{30} + \frac{5}{2} + \int_0^{\frac{3}{4}} \left(\frac{15}{2} - 10x \right) y^2(-\log x) dx$$

$$+ \int_{\frac{3}{4}}^1 \left(\frac{15}{2} - 10x \right) y^2(-\log x) dx$$

最後ノ項ハ負デアナルカラ, $y^2(-\log x) = y^2(\tau) \leq 1$ ナルコ

トヲ用ヒテ

$$\left\langle \frac{81}{30} + \frac{5}{2} + \int_0^{\frac{3}{4}} \left(\frac{15}{2} - 10x \right) dx \right\rangle$$

$$= \frac{81}{30} + \frac{5}{2} + \left[\frac{15}{2}x - 10 \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{81}{30} + \frac{5}{2} + \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{10}{2} \cdot \frac{9}{16}$$

$$\left\langle 2,7 + 2,5 + 2,82 = 8,02 \right\rangle < 9.$$

依ッテ定理ハ完全ニ証明セラレタ。