259. 兩鎖律ニツイテ

森　新　治　郎（廣島文理大）

紙上談話會第三十八号ニ於テ秋月氏ガ regulär ナ環デハ倍鎖律カラ約鎖律ガ出テ來ルコトヲ示サレ更ニ最近日本数學物理學會記事ニソノ詳細ナ証明ヲ發表サレマシタ。興味深ク拝見シマシタノデ少シ氣付キマシタコトヲ簡單ニ述ベサセテ戴ヒマス。アノ定理ヲ多少拡張シマスレバ次ノ定理トナル様ニ思ハレマス。

定理．$\mathfrak{R}$ ヲ倍鎖律（beschränkt）ノ成立スル可換環トスレバ $\mathfrak{a}=(0):(r)$ ヲ最小ナラシムルヤウナ元素 r ガ $\mathfrak{R}$ ノ内ニ存在スル。$\mathfrak{R}$ ニ於テ約鎖律ガ成立スルタメニ

必要充分ナル條件ハ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{R}^2)/\mathfrak{R}^2$ ガ有限ノ Basis ヲ有スルコトデアル。(r ガ regulär デアルナラバ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{R}^2) = \mathfrak{R}^2$ トナッテ秋月氏ノ定理ヲ得ル)。

先ヅ $\mathfrak{a} = (0):(r)$ ヲ最小ナラシムル元素 r ノ存在ヲ示ス。

a). (0) ガ Primideal ナルトキ。任意ノ零デナイ元素ヲ r トスレバ $\mathfrak{a} = (0):(r) = (0)$ トナル。

b). (0) ガ Prim. デナイトキ。コノ場合ノ $\mathfrak{R}$ ノ構造ハヨク知ラレテ居テ $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^2$ ト $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}^2$ ノ二ツノ場合ガ考ヘラレル。第一ノ場合ハ單位元素ガ存在シ，第二ノ場合ニハ Total nullteiler ガ存在シ其ノ集合ハ一ツノ Ideal トナル。故ニ倍鎖律 (beschränkt) ニヨッテ $\mathfrak{a} = (0):(r)$ ヲ最小ナラシムル元素 r ハ存在スルデアロウ。

必要ノ証明. (0) ガ Prim. デアレバ明カニ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{R}^2) = \mathfrak{R}^2$ 従ッテ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{R}^2)/\mathfrak{R}^2$ ハ有限ナル Basis ヲ持ット考フベク，(0) ガ Prim. デナイトキハ

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$$

トナル。コヽニ $\mathfrak{R}_2$ ハ (0) カ又ハ單位元素ヲ有スル環デアリ $\mathfrak{R}_1$ ハ nilpotent ナ環デアル。$\mathfrak{R}$ ニ約鎖律ガ成立スルカラ $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_1^2$ ニ又約鎖律ガ成立スル。ヨッテ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{R}^2)/\mathfrak{R}^2$ ハ有限ノ Basis ヲ持タネバナラヌ。

充分ノ証明. (0) ガ Prim. ノトキハ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{R}^2) = \mathfrak{R}^2$。ソシテ $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^2$ デアレバ $\mathfrak{R}$ ニ於テ約鎖律ノ成立ハ明カデ

アル。又 $\mathfrak{R}\neq\mathfrak{R}^2$ ナレバ r ヲ $\mathfrak{R}^2$ 外ノ元素トスル。倍鎖律ノ假定カラ $mr=rr'$ （m: 自然数, r': $\mathfrak{R}$ ノ元素）トナル。從ッテ $\mathfrak{R}^2$ 外ノ任意ノ元素 x ニ對シテ $mx=xr'\equiv 0(\mathfrak{R}^2)$ ガ成立スル。

(0) ガ *prim.* デナイトキ。$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^2$ ナレバ $\mathfrak{R}$ ハ單位元素ヲ有シ，約鎖律ノ成立ハ明カデアル。$\mathfrak{R}\neq\mathfrak{R}^2$ ナルトキハ

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2 \quad (\mathfrak{R}_2^2=\mathfrak{R}_2,\ \mathfrak{R}_1\neq(0),\ \mathfrak{R}_1^k=(0))$$

トナル。$\mathfrak{R}_1^2=(0)$ ナレバ $\mathfrak{a}=\mathfrak{R}_1$ 從ッテ $(\mathfrak{a},\mathfrak{R}^2)/\mathfrak{R}^2=\mathfrak{R}_1$ 依ッテ $\mathfrak{R}$ ニハ約鎖律ガ成立スル。

$\mathfrak{R}_1^2\neq(0)$ デアルナラバ $\mathfrak{a}=(0):r$ ヲ最小ナラシムル r ハ $r=r_1+r_2$ $(r_1\neq 0)$ $(r_1, r_2$ ハ夫々 $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ ノ元素）トナル。ソシテ $\mathfrak{R}\geqq(\mathfrak{a},\mathfrak{R}^2)\supset\mathfrak{R}^2\neq(0)$ デアルカラ

$$mr=rr' \quad (m: \text{自然数},\ r': \mathfrak{R}\ \text{ノ元素})$$

ヲ得ル。今 $(\mathfrak{a},\mathfrak{R}^2)$ 外ノ任意ノ元素ヲ x トスレバ

$$r(mx-r'x)=0,\quad mx-r'x\equiv 0\,(\mathfrak{a}),$$

$$mx\equiv 0\ ((\mathfrak{a},\mathfrak{R}^2))。$$

從ッテ $\mathfrak{R}$ ニ於テ又約鎖律ガ成立スル。即チ定理ハ證明サレタ。

約鎖律ヲ假定シタ環ノ構造カラ知ラレルコトデハアルガ次ノ樣ナ定理モ成立スル。

定理. $\mathfrak{R}$ ヲ約鎖律ガ滿足サレル $\mathfrak{R}^2\neq(0)$ ナル可換環トスル。$\mathfrak{R}$ ニ倍鎖律 (*Beschränkt*) ガ成立スルタメニ

必要充分ナ條件ハ

I　$\mathfrak{P}$ = Primideal ($\neq (0)$) ガアルナラバ全部最大 Ideal デアリ,

II　$\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^2$ ガ有限個ノ元素ヲ有スルコトデアル。

梗概ヲ述ベマシタダケデ不充分ナ点モアリ改メル可キ所モアリマセウガ思ヒ浮ンダマヽヲ述ベマシタ。