# 253. Finsler ノ空間ニ於ケル運動方程式

穂刈四三二（北大）

L. Berwald ノ研究シタ Finsler ノ空間 (Math. Zeit., 25, 1926) ニ於ケル Bewegung ヲ規定スル Killing ノ方程式（ノ拡張）トシテ M. S. Knebelman ガ Amer. Jour. of Math., 51, 1929 デ

$$g_{ih}\xi^{h}_{,j} + g_{hj}\xi^{h}_{,i} + \xi^{h} g_{ij,h} + \xi^{h}_{,m} p^{m} g_{ijh} = 0$$

ヲ発表シテヰル。元来 L. Berwald ノ方法ハ ausgezeichnetes Linienelement (a. L. ト略記スル) $p^i$ ニツイテ一次ノ positiv-homogene Funktion $F(x,p)$ ニ Variationsrechnung ヲ施シテ metrisch ナ Finsler ノ空間ヲ建設シタモノデアル。

1°) コノ方法ノ短所ハ Vektor ノ Parallelverschiebung ニ對シテソノ長サガ一般ニハ変化スル. コノ様ナ空間デ Bewegung ヲ論ズルコトハ余リニモ突飛スギハシナイデシヤウカ。

2°) 今一ツ注意シナケレバナラナイコトハ Riemann 空間デハ Element ハ Koord. $x^i$ ノミヲ有スルガ

Finsler ノ空間デハ $x^i$ ノ外ニソノ Punkt ニ adjungieren サレタ a. L. $p^i$ が存在スル。即チ $(x, p)$ ノ組が Element デアル。従ッテ $x^i$ が固定サレテキルトキ; $p_1 \neq p_2$ デアレバ Element トシテハ $(x, p_1) \neq (x, p_2)$ デアル。Knebelman ハ $x^i$ ノミノ infinitesimale Transformation

(1) $\quad \bar{x}^i = x^i + \xi^i \delta t$

ノモトデ Bewegung ヲ論ジテキルが，上ニ述ベタ意味カラスレバ $x$ ト $p$ トノ infinit. Transf. ニ對シテ論ズベキデハナイデセウカ。

コノ 1°) ニ對シテハ E. Cartan ノ建設シタ metrisch ナ空間ヲ用フレバヨイ。2°) ニ對シテハコヽデ $x$ ト $p$ トノ infinit. Transf. ニ對シテ Bewegung ヲ考ヘテ見マウ。

中心 $(x^i)$ ニ於ケル $p^i$ ノ infinit. Transf. ハ

(2) $\quad \overset{*}{p}{}^i = p^i + C^i_j(x) \delta t$

デ與ヘラレル。コノ $\overset{*}{p}$ ヲ $x$ カラ $\bar{x}$ ニ移シテ $\bar{p}^i$ が得ラレタトスレバ (1) ト (2) トカラ

(3) $\quad \bar{p}^i = p^i + \left( C^i_j + \dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) p^j \delta t$

コノ (1) ト (3) ヲ組合ハセタ Transf. ハ infinitesimal ニハ Gruppe ノ性質ヲ有スルコトハ直グワカル。(1) ト (3) トノモトデハ二次以上ノ項ヲステヽ

$$\bar{g}_{ij}(\bar{x},\bar{p})=g_{ij}(x,p)+\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^k+\frac{\partial g_{ij}}{\partial p^k}\left(C^k_l+\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l}\right)p^l\right\}\delta t$$

$$d\bar{x}^i=dx^i+\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}dx^j\delta t$$

デアルカラ

$$\bar{g}_{ij}d\bar{x}^i d\bar{x}^j=g_{ij}dx^i dx^j+\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^k+\frac{\partial g_{ij}}{\partial p^k}\left(C^k_l+\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l}\right)p^l\right.$$

$$\left.+g_{hj}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^l}+g_{hi}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^j}\right\}dx^i dx^j\delta t$$

従ッテ第一ニ長サガ *invariant* デアルタメニハ

$$(4)\quad g_{hi}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^j}+g_{hj}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^i}+\xi^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+2C_{ijk}\left(C^k_l+\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l}\right)p^l=0$$

但シコヽニ $p^i$ ハ *Einheit* ニトッテオク。従ッテ $2C_{ijk}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial p^k}$.

$\xi^k$ ハ $x$ ノミノ函数デアルカラ

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}=\xi^k_{/i}-\xi^h\overset{*}{\Gamma}{}^k_{hi}$$

コレヲ (4) ニ代入シテ整頓スレバ

$$(5)\quad \xi_{i/j}+\xi_{j/i}+2C_{ijr}\left(\xi^r_{/0}+C^r_l p^l\right)=0$$

然ルニ $p^i$ ノミノ *Transf.* ニ對シテモ矢張リ長サガ *invariant* デナケレバナラナイカラ (2) カラ

$$(6)\quad \boxed{C_{ijr}C^r_l p^l=0}$$

従ッテ (5) カラ

$$(7) \qquad \boxed{\xi_{i/j}+\xi_{j/i}+2C_{ijr}\xi^{r}{}_{/0}=0}$$

コレラノ條件ノモトデ Winkel モ亦 invariant デアルコトガ容易ニワカルカラ次ノ結果ガ得ラレル。

<u>infinit. Transf. (1), (2), (3) ガ Bewegung デアルタメノ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ $\xi^i$ 及ビ $C^i_j$ ガ夫々 (7) 及ビ (6) ヲ満足スルコトデアル。</u>

コノ (6) ト (7) ヲ用フレバ Riemann 幾何學ニ於ケル Bewegung ニ関スル定理ガ容易ニ Finsler ノ場合ニ拡張サレル。特別ノ場合トシテ

$\boxed{\text{系 1}}$ $x$ ノミノ infinit. Transf. ニ對スル運動方程式ハ (7) デアル。

$\boxed{\text{系 2}}$ $p$ ノミノ infinit. Transf. ニ對スル運動方程式ハ (6) デアル。

Riemann ノ場合ニハ $C_{ijk}\equiv 0$ デアルカラ (6) 式ハ恒等的ニ満足サレ、(7) 式ハ

$$\xi_{i/j}+\xi_{j/i}=0$$

トナッテ所謂 Killing ノ方程式トナル。又 $C^i_j$ ガ

$$(8) \qquad C^i_j=\rho(x)\,\delta^i_j$$

ナル Form ヲトルトキハ (6) 式ハ $C_{ijk}$ ノ性質カラ恒等的ニ成立スル。(8) ノ幾何学的意義ハ中心 $x$ ニ於ケル a. L. ヲ廻轉セズニ，ソノ長サノミヲ変ズルコトデアル。従ッテ (6)

ノ恒等的ニ成立スルコトハ當然ノコトデアル。

Finsler ノ空間ノ一般化サレタ河口空間ニ對シテモ，同様ナ結果が得ラレル。コレハ後日述ベサセテモラウコトニスル。