

249. 函数方程式 $f(f(z)) = z$ = 就イテ

石橋 榮 (関西学院)

本紙 57, 58, 59, 諸号 = 五ツテ南雲教授が考察サ
レタ函数方程式 $f(f(z)) = F(z)$ / $F(z) \equiv z$ ナル場合デ
アリマス。コノ場合ハ *trivial* ナタメ = 同教授ハ除外サ
レタノダラウト推量シマスガ、以下 = 概略ヲ述ベテミタイト
思ヒマス。

一般 = $\underbrace{f(f(\dots(f(z))\dots))}_{n\text{回}}$ ヲ簡單ノタメ $f^n(z)$ デ表

ハスコトニシマス。

$$f^n(z) = z \quad (1)$$

ノ解トシテ直グ眼ニツクノハ

$$f(z) = \rho z \quad (\rho^n = 1) \quad (2)$$

デアリマス、又 $\varphi(z)$ ヲ任意ノ一價單葉函数トシテ、之レデ

(2) ヲ *transform* シタ

$$f(z) = \varphi^{-1}(\rho \cdot \varphi(z)) \quad (3)$$

モヤハリ (1) ノ解デス、然ラバソノ逆ハドウカトイフ問題ニ
ナツテ當惑シタノデスガ、逆ガ成立シマス。即チ (1) ノ解ハ
必ズ (3) ノ形ノモノデアリマス。ソレニハ $f(z)$ ガ (1) ノ解

とシテ、

$$\varphi(z) = z + \rho f^{-1}(z) + \rho^2 f^{-2}(z) + \dots + \rho^{n-1} f^{-(n-1)}(z)$$

トスレバヨロシイ。實際

$$\begin{aligned} \varphi\{f(z)\} &= f(z) + \rho z + \rho^2 f^{-1}(z) + \dots \\ &\quad \dots + \rho^{n-1} \cdot f^{-(n-2)}(z) \end{aligned}$$

ノ所ハ $f^n(z) = z$ 即チ $f(z) = f^{-(n-1)}(z)$ 及ビ $\rho^n = 1$ ヲ
持込マスト

$$\varphi\{f(z)\} = \rho \cdot \varphi(z)$$

即チ (3) ノ關係式が得ラレマス。

モシ變數ヲ實數ニ制限シ、而モ解 $f(x)$ が連続ナルヤウ
ニシヤウトスルト $n \geq 3$ ノ場合ハ解が存在シナイヤウデス。