248. 函數ノ單葉性 II

佐藤徳意 (北大)

函數ノ單葉性ニツイテ考ヘタノハ略々一年前ノコトデ，ソノ後ソノママニシテ置キマシタトコロ忘レタ結果モ多イノデ、Note シテミル氣ニナリマシタ。

話ノ中心ハ能代氏ノ興味深イ

定理 A

"$f(z)$ ハ凸狀領域Dデ正則デ、コヽデ

$$R(e^{i\alpha}f'(z))>0 \qquad (\alpha \text{ハ或實數})$$

ナラバ，$f(z)$ ハDデ單葉デアル"

デ，コレヲ二三ノ角度カラ考察シテ見タイト思ヒマス。

（能代氏：函數ノ單葉性ニ就テ，定理B. 談話會第18号）

コノ定理ハ形ハ簡明デ効力ハ大キイ。ダカラモウ拡張ハ出來ナイダラウカ？　函數ノ單葉性I（第21号）ノ定理2ノ別証明ニ用ヒタ方法（証明ハ記サナカツタが）カラ考ヘルト $f'(z)$ ヲ違ツタ條件デ置キ換ヘテモ成立シサウニ見エルカラ，モット拡張出來ルダラウトノ想像ニ導カレテ

(I) "$R(e^{i\alpha}f'(z))>0$ ヲ $f'(z)\neq 0$ デ置キ換ヘルコトハ出來ナイダラウカ？"

ソノ不可能デアルコトハ $f(z)$ トシテ e^z ヲトルコトデ直チニ解決スル、併シコノ問題ヲコレデ捨テルノハ惜シイ。再ビ後ニ触レルコトニシヤウ。

$R(e^{i\alpha}f'(z))>0$ ヲ無條件デ $f'(z)\neq 0$ トスルコトが出來ナイコトが分ツタ。ソコデ $R(e^{i\alpha}f'(z))>0$ ヲソノママトシ

(II) "Dカラ條件凸狀ヲハヅシテモ單葉性ヲ保持スルコトが出來ルカ？"

解答ハ $f(z)$ トシテ $z^{\frac{3}{2}}$ ヲトリ、Dトシテ 0 カラ $-\infty$ マデ實軸ニ沿ツテ鉄ヲ入レタ領域ヲトルコトニヨツテ否定的デアル、

ソコデ更ニ方針ヲ変ヘテ $\frac{df(z)}{dz}=\frac{df(z)}{dz}\Big/\frac{dz}{dz}$ デアルカラコレヲ拡張シテ、Dヲ凸状領域トシ

(Ⅲ) "$\varphi(z)$ ガ D デ正則単葉ナ函数デアッテ D デ

$$R\left(e^{i\alpha}\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}\right)>0$$

ナラバ $f(z)$ ハ D デ単葉デアル。"

ト結論シタイ、特ニ $\varphi(z)$ ガ convex function デアルト尾崎氏ノ研究ニヨリコノ豫想ハ正シイ。

(On the theory of multivalent functions, Science report of the Tokyo Bunrika Daigaku. No. 40. 1935)

併シ一般ノ場合ニナルト遺憾ナガラ成立シナイ、ソレハDトシテ $Rz>0$ ヲトリ $f(z)$, $\varphi(z)$ トシテ夫々

$$f(z)=z^3$$

$$\varphi(z)=z^2$$

ヲトルト充分デアル。

(コノ(Ⅲ)ハ(Ⅱ)ガ成立スルト仮定スルト必然的ニ成立シマス、従ッテ(Ⅲ)ガ否定サレルト(Ⅱ)ガ同時ニ否定サレマス。(Ⅱ)ノ實際ノ解決ハコノ方デアリマシタ。(Ⅱ)ノ例 $f(z)=z^{\frac{3}{2}}$ ハ(Ⅲ)ノ例カラ吉田先生ノ御指示デ得ラレタモノデシタ)

正誤：　函数ノ単葉性Ⅰ．（第21号）定理2．中ノ<u>領域</u>

Dデ ヲ 凸状領域Dデ ニ訂正。