242. Picard-Vessiot ノ理論ニ就テ. 4

吉田耕作（阪大）

domain of rationality R ノ element ヲ係数トスル

$$\text{(1)}\quad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + p_n(x)\,y = 0$$

ノ Galois 群ヲ $\|A\|$ トスル。

定理 1. $R(y)$ ノ幾ツカノ element $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_k$ ガ R ノ element ヲ係数トスル線形微分方程式

$L(y)=0$

ノ Fundamental solutions トスル。(R(y) ノ定義ハ前論參照)。

然ラバ $\|A\|\cdot\alpha_i$; $i=1,2,\cdots\cdots,k$; モ $L(y)=0$ ヲ満足スルカラ $\|A\|$ ハ $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_k$ ノ間ノ一ツノ linear substitution group G ヲ induzieren スル。G ハ $\|A\|$ ニ stetig homomorph ダカラ connected 且ツ明ニ algebraic デアル。k 次ノ non singular matrix ノ作ル群 M_k ニ於ケル G ノ férmeture (G ノ limiting point デ M_k ニ属スルモノヲ G ニツケ加ヘテ得ラレルモノ) $\overline{G}$ ハ R ノ上ノ $L(y)=0$ ノ Galois 群デアル。

證明. $L(y)=0$ ノ Galois 群ヲ G_L トスル. α_1, $\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_k$ (及ビソノ derivatives), R ノ element ノ rational function デソノ numerical value $\in R$ ナモノハ即チ R(y) ノ element デソノ numerical value $\in R$ ナモノダカラ $\|A\|$ 從ツテ G 從ツテ $\overline{G}$ ニヨリ invariant。故ニ $\overline{G}\subseteqq G_L$。明ニ $\overline{G}$ ハ G_L ニ於テ閉デタ connected, algebraic ナ群デアル。$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_k$ (及ビソノ derivatives), R ノ element ノ rational function デ $\overline{G}$ ニヨツテ invariant ナモノハ即チ R(y) ノ element デ $\|A\|$ ニヨリ invariant ダカラソノ numerical value $\in R$。故ニ前論 187 p.9 第7行目ノ式ニヨリ

$$G_h = \overline{G}$$

定理 2. (1) ノ $m(<n)$ コノ独立解 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m$ ガ R ノ element ヲ係数トスル線形微分方程式

(2) $Q(y)=0$

ヲ満足スルトスレバ R ノ element ヲ係数トスル線形微分方程式 $S(Q)=0$ ガ存在シテ y ニ関スル identity

$$P(y) = S\big(Q(y)\big)$$

ガ成立スル (Cf. F. Rádl: Über das verallgemeinerte gemeinsame Masze von zwei Differentialpolynomen, M. Z. 40 Bd. 3 Heft, 1935) 之ヲ symbolical ニ

(3) $P = S \times Q$

ト書クコトニスル。然ラバ

(4) $\|A\| = \begin{Vmatrix} B & 0 \\ X & C \end{Vmatrix}$

ノ如ク Galois 群 $\|A\|$ ガ分解シ夫々 m 次, $n-m$ 次 Matrix ノ群 $\|B\|$, $\|C\|$ ノ M_m, M_{n-m} ニ於ケル permeture ガ $Q=0$, $S=0$ ノ Galois 群デアル。

証明. $Q=0$, $S=0$ ノ Fundamental solutions ハ夫々 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m$; $Q(y_{m+1}), Q(y_{m+2}), \cdots\cdots, Q(y_n)$ デアル。$Q=0$, $S=0$ ハ何レモ R ノ element ヲ係数トスルカラ automorphism $\|A\|$

ヲ施シタトキ

$$\|A\|\cdot Q(y_i)=Q(\|A\|\cdot y_i)=0;\quad i=1,2,\cdots\cdots,m,$$

$$\|A\|\cdot Q(y_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}Q(y_k)\qquad (\|A\|=(a_{ik}))$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}a_{i,k}Q(y_k);$$

$$i=m+1,\ m+2,\cdots\cdots\cdots,n。$$

故ニ $$\|A\|=\begin{Vmatrix} B & 0 \\ X & C \end{Vmatrix}$$

ノ形。故ニ定理1ヲ用フレバヨイ。

定理3. 逆ニ $\|A\|$ が(4)ノ如ク分解スルトキ; y_1, $y_2,\cdots\cdots,y_m$ ヲ *Fundamental solutions* トスル線形微分方程式

$$Q(y)=\frac{d^m y}{dx^m}+q_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+q_m(x)y=0$$

ヲ作ルト $q_1,\cdots\cdots,q_m$ ハ M_m ノ従ッテ $\|B\|$ ノ従ッテ $\|A\|$ ノ *invariant* ダカラ $\subseteqq R$. ヨッテ

$$P=S\times Q$$

ノ如キ分解が可能。定理2ニヨレバ $Q=0$, $S=0$ ノ *Galois* 群ハ夫々 $\|B\|\cdot\|C\|$ ノ M_m, M_{n-m} ニ於ケル *fermeture* ナリ。

定理4. $P=0$ ノ *Galois* 群 $\|A\|$ が *integrable*

ナラバ Lie ノ定理(筆者:連続群論 p.126)ニヨリ

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & & \\ \times & a_{22} & 0 \\ \times & \times & \ddots \; a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

ヨッテ定理3ニヨリ

$$P = P_1 \times P_2 \times \cdots\cdots \times P_n$$

ナル如キ因数分解? が可能デアル。コヽニ P_i ハ R ノ element ヲ係数トスル一階ノ線形微分形式. 即チ $r_i(x) \subseteqq R$ トシテ

$$(5) \quad P(y) \equiv \left(\frac{d}{dx} + r_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx} + r_2(x)\right) \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \left(\frac{d}{dx} + r_n(x)\right) \cdot y$$

(注意) 斯ル $P(y)=0$ ハ明ニ R ニ於テ integrable by quadrature。逆ニ R ニ於テ intigrable by quadrature ナル $P(y)=0$ ノ Galois 群ハ integrable ダカラ (Picard: Traité 3, p.597)

定理4'. $P=0$ ガ R ニ於テ integrable by quadrature ナタメノ必充條件ハ (5) ノ如キ因数分解ノ可能ナコトデアル。

Vessiot ノ定理 ($P=0$ ガ integrable by quadrature ナタメノ必充條件ハ $P=0$ ノ Galois 群ノ integrable ナコトデアル —— Picard. loc. cit.)

ニ於ケル充分條件ノ証明ヲ上ノ定理4ノ如クシテ求メルノガ
precise且ツワカリ易イト思ヒマス。