239. 函數方程式 $f^{k}(x)=F(x)$ ニ就テ

南雲道夫（阪大）

$\boxed{\mathrm{I}}$ 福原氏ガ注意サレタ如ク（紙上談話會61号222）Schröder ノ方程式ト同等ナ〔$F(x)$ ヲ既知 χ ヲ未知函數トスル〕方程式

(1) $\chi F \chi^{-1}(x)=cx$

ヲ解ケバ，$\lambda^{k}=c$ ナル λ ニツイテ

(2) $f(x)=\chi^{-1}(\lambda\chi(x))$

ト置ケバ

(3) $f^{k}(x)=F(x)$

トナル。$\left[f^{k}(x)=\underbrace{f(f(\cdots\cdots(f}_{k\text{回}}(x))\cdots\cdots))\right]$

故ニ $F(x)$ ガ増加ノトキハ $c>0$，減少ノ時ハ $c<0$ トシテ(1)ヲ解ケバ，(2)ニヨツテ(3)ノ解ガ與ヘラレル。

今特ニ $F(0)=0$，$x=0$ デ $F(x)$ ガ正則、且ツ

$F'(0)\neq 0 \qquad |F'(0)|\neq 1$

ナル場合ニハ (1) ハ正則ナ解 $\chi(x)$ [$\chi(0)=0$] ヲ持ツ.

〔福原氏常微分方程式論（岩波講座）195頁——197頁参照〕

従ツテふらんす式ノ *en général* ニハ $F(x)$ ガ増減シ、イヅレノ場合ニモ問題ガ解ケタト言ヘバ言ヘナイコトハナイ。

$\boxed{2}$ 次ニ問題トナルノハ，“$F(x)$ ガ $x=0$ ノ近傍デ純単調連続ナルトキ (1) ガ解ケルカドウカ？ 又 (1) ガ解ケナクトモ他ノ方法デ (3) ガ解ケルカドウカ？” デアル。

一体此ノ種ノ問題ノ基本的ナ考ヘノ一ツハ，——既ニ福原君ガ強調サレタ如ク（59号 209）——変換トイフコト，即チ

$$\chi f \chi^{-1} = g$$

トスレバ

$$\chi f^n \chi^{-1} = g^n$$

（或ハ $\chi f_i \chi^{-1} = g_i$ トスレバ，$\chi f_1 f_2 \chi^{-1} = g_1 g_2$ 等）

ガ成立スルコトデアル。ソコデ我々ハ先ヅ“如何ナル場合ニ $f(x)$ ヲバ $g(x)$ ニ変換スルヤウナ χ ガ存在スルカ？” ヲ論ズベキデアル。

此処デハ常ニ純単調連続函数ノミヲ考ヘル。（ソレハ位相幾何學的寫像トシテ考ヘラレルカラデアル。）

(i) 先ヅ $\chi f \chi^{-1} = g$

ニ於テ $\begin{cases} f \text{ ガ増加ナラバ，} g \text{ モ増加函数} \\ f \text{ ガ減少ナラバ，} g \text{ モ減少函数} \end{cases}$

ナルコトハ明ラカデアル。（χ ハ増加デモ減少デモカマハナイ）

(ii) 次ニ $f(x)$ ノ不動点〔$f(\xi)=\xi$ ナル ξ ノコト〕ハ $g(x)$ ノ不動点ニ変換サレル（証明容易）. 従ッテ $f(x)$ ニ於ケル不動点ヲ含マヌ區間ハ，$g(x)$ ニ於ケル不動点ヲ含マヌ區間ニ変換サレル（可逆的ニ）. <u>不動点ヲ含マヌ區間ヲ假ニ"自由ナ區間"ト名付ケル</u>。

(iii) (α, β) ヲ $f(x)$ ガ不動点ヲ含マヌ區間トシ，(γ, δ) ヲ之レニ對スル $g(x)$ ノ不動点ヲ含マナイ區間トスレバ

(α, β) デ $f(x) > x$ ナラバ，(γ, δ) デ $g(x) > x$.

〃 $f(x) < x$ ナラバ，〃 $g(x) < x$.

（証明ニハ χf ト $g\chi$ トノ大小ヲ比較セヨ）

$\boxed{3}$ $f(x)$ ガ〔従ッテ $g(x)$ モ〕純増加ノ場合:

$f(x)$ ノ不動点ノ分布ハ任意ニ複雑ニナリ得ル（勿論閉集合）.

$f(x)$ ガ $g(x)$ ニ変換サレ得ルタメニハ先ヅ $f(x)$ ノ不動点ノ分布ト $g(x)$ ノ不動点ノ分布トガ *topologisch* ニ同型ナルヲ要スル。

次ニ $f(x)$ ト $g(x)$ トノ<u>相對應スル自由ナ區間ニ於テハ</u>

$f(x) > x$ ナラバ $g(x) > x$,

$f(x) < x$ ナラバ $g(x) < x$.

デナケレバナラヌ。

以上ノ二ツノ性質（不動点ト自由區間ニ関スル條件）ガ満タサレテヰルトキニハ，$f(x)$ ヲ $g(x)$ ニ変換スルヤウナ χ〔純単調連続函数〕ガ存在スル。

何トナレバ $f(x)$ ノ不動点ヲ $g(x)$ ノ不動点ニ對應セシメ〔*topologisch* ニ同型ナ分布ヲナスニヨリ〕ソレニ従ッテ自然ニ對應スル自由區間ニ於イテハ、夫々 Abel ノ方程式

$$\varphi(t+1)=f\varphi(t)$$
$$\psi(t+1)=g\psi(t)$$

ヲ解イテ $\chi=\psi\varphi^{-1}$ トスレバヨイ．〔純増加連続函数ニ就テハ、Abel ノ方程式ハ自由區間ニ於テ常ニ容易ニ解ケル！（５７号197参照）〕

$\boxed{4}$ $f(x)$ ガ〔従ッテ $g(x)$ モ〕純減少ノ場合：

$f(x)$ ノ不動点ハ只一ツ存在スル。今便宜上ソノ不動点ヲ $x=0$ ト假定スル。$g(x)$ ノ不動点モ $x=0$ ト假定スル。

$x'=f(x)$ ナル寫像ハ $x<0$，$x>0$ ナル二ツノ部分ヲ交換スル！ ソコデ $x\leqq 0$ ノ時ハ

$$f(x)=f_1(-x),\quad g(x)=g_1(-x),\quad \chi(x)=-\chi_1(-x)$$

トシ，$x\geqq 0$ ノ時ハ

$$f(x)=-f_2(x),\quad g(x)=-g_2(x),\quad \chi(x)=\chi_2(x)$$

ト置ケバ $f_i(x)$, $g_i(x)$, $\chi_i(x)$ ハイヅレモ $x\geqq 0$ デ定義サレタ純増加函数トナル〔$\chi(x)$ ハ純増加ト假定ス〕．

之ニヨリ

$$\chi f \chi^{-1} = g$$

ノ代リニ $x \geqq 0$ ニ於ケル聯立方程式

$$\begin{cases} \chi_2 f_1 \chi_1^{-1} = g_1, & (\text{元ノ } x \leqq 0 \text{ ニ於テ}) \\ \chi_1 f_2 \chi_2^{-1} = g_2 & (\text{元ノ } x \geqq 0 \text{ ニ於テ}) \end{cases}$$

ヲ得ル。之ハ次ノ聯立方程式ト同等デアル。

$$\begin{cases} \chi_1 f_2 f_1 \chi_1^{-1} = g_2 g_1, \\ \chi_2 = g_1 \chi_1 f_1^{-1}. \end{cases}$$

第一ノ式サヘ解ケバ（χ_1 ノミノ方程式），第二ハ自然ニ解ケル。從ッテ問題ハ既ニ論ゼラレタ純増加ノ場合ニ帰着シタ。

$\boxed{5}$ 以上ノ一般論ヲ特ニ Schröder ノ方程式 (1) ニ適用スレバ

(a) $F(x)$ が純増加ノ時，$c > 0$.

(a_1) $c > 1$ ノ時ハ

$$x > 0 \text{ デ } F(x) > x, \quad x < 0 \text{ デ } F(x) < x.$$

(a_2) $c < 1$ ノ時ハ

$$x > 0 \text{ デ } F(x) < x, \quad x < 0 \text{ デ } F(x) > x.$$

(a_3) $c = 1$ ノ時

$$F(x) \equiv x \qquad [\chi(x) \text{ ハ任意}].$$

(b) $F(x)$ が純減少ノ時，$c < 0$.

(b_1) $c > -1$ ノ時ハ

$$-x < F^2(x) < x.$$

(b_2) $C<-1$ ノ時ハ

$$x<0 \text{ デ } F^2(x)<x,\quad x>0 \text{ デ } F^2(x)>x.$$

(b_3) $C=-1$ ノ時ハ

$$F^2(x)\equiv x.$$

以上ノ條件ガ満タサレテヰルコトガ Schröder ノ方程式 (1) ガ解ケルタメノ必充條件デアル!

$\boxed{6}$ 尚 (1) ガ解ケナイ時デモ

$$(3)\quad f^k(x)=F(x)$$

ハ次ノ如クニシテ $F(x)$ ガ純減少ノ場合ニモ〔純増加ノ場合ハ既ニ論ゼラレタ〕解キ得ル。(k ハ奇数デナケレバナラヌ)

前述ノ $\boxed{4}$ ニ於テ

$$\begin{cases} \chi_2 f_1 \chi_1^{-1}=g_1, \\ \chi_1 f_2 \chi_2^{-1}=g_2. \end{cases}$$

トアル $g_1 g_2$ ヲバ今特ニ $g_1=g_2$ ナルヤウニ選ブ。

即チ $g_1=g_2=g$ トオケバ, (3) ノ代リニ (k ガ奇数ノトキハ)

$$\left.\begin{aligned} \chi_2^{-1} g^k \chi_1 &= F_1 \\ \chi_1^{-1} g^k \chi_2 &= F_2 \end{aligned}\right\}$$

従ッテ之ト同等ナ

$$\begin{cases} \chi_1^{-1} g^{2k} \chi_1 = F_2 F_1 \\ \chi_2 = g^k \chi_1 F_1^{-1} \end{cases}$$

ヲ解クコト＝帰着スル。之ハ純増加ノ場合ノ

$$g^{2k}(x) = \chi_1 F_2 F_1 \chi_1^{-1}$$

ヲ解クコトデアルカラ，57号197デ論ジタ場合＝ヨツテ常＝解カレルコトガワカッタ。（χ_1 ハ任意デヨイ）

以上デ純単調ナ場合＝於ケル函数方程式

$$f^{k}(x) = F(x)$$

ハ全部解決シタト思フ。純単調ナル假定ヲ除イタラバドウナルカ？　之ガ次＝来ル難問題デアル。