237. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ

福　原　満　洲　雄（北大）

§1. 前回ノ續キトシテ

(A)　$x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

ニ於テ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ガ次ノ形ニ書ケル場合ヲ考ヘヨウ。

$$P(x,y)=P_0(y)+xP_1(x,y)$$

$$Q(x,y)=Q_0(y)+xQ_1(x,y)$$

$$P_0(y)=\lambda y^p+\cdots\cdots$$

$$Q_0(y)=y^{p-1}+\cdots\cdots$$

展開式ニ関スル假定ハ例ノ通リデヨイノデアルガ記号ガゴタ

ゴタシテ來ルカラ簡單ニ $P_0(y)$, $Q_0(y)$ ハ $y=0$ デ,

$P_1(x,y)$, $Q_1(x,y)$ ハ $x=y=0$ デ正則ト假定シテ置ク.

所シ必要ナノハ正則性デハナク近似的ノ性質デアルコトハ証明カラ分ル。$p=1$ ナラバ前回調ベタ場合ニナルカラ，ココデハ $p>1$ トスル。

§2. $P_1(0,0)\neq a$ ナラバ (A)ヲ形式的ニ満足スルヤウニ

$$(\alpha)\qquad y\sim x^{\frac{1}{p}}\left\{\alpha_0+\alpha_1 x^{\frac{1}{p}}+\cdots\cdots+\alpha_j x^{\frac{j}{p}}+\cdots\cdots\right\}$$

ノ係數ヲキメル。$\lambda\neq\dfrac{1}{p}$ ナラバ α_0 ハ

$$\left(\frac{1}{p}-\lambda\right)\alpha_0{}^{p}=a$$

カラキマル、故ニソノ取リ方ハ p 通リアル。λp^2 ガ p ヨリ大キナ整數デナケレバ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots$ ハ常數トシテ（α_0 ノ値ヲ一度キメテ了ヘバ）唯一通リニキマル、λp^2 ガ p ヨリ大キナ整數ナラバ一般ニ $\log x$ ガ現ハレル。何レニシテモ

$$y=x^{\frac{1}{p}}(\alpha_0+z)$$

ト置ケバ z ガ満足スル方程式ハ

$$\text{(B)}\qquad x\frac{dz}{dx}=\left(\lambda-\frac{1}{p}\right)z+\cdots\cdots$$

ナル形ヲ持ツ、コヽニ書オレテナイ部分ハ $x^{\frac{1}{p}}$, z ノ冪級數デ，ドノ項モ $x^{\frac{1}{p}}$ 又ハ z^2 ヲ因子ニ含ム。從ッテ前二回ノ結果ヲ利用スルコトガ出來、正ノ數 ε, δ ガ十分ニ小サイ

トキ

$$0 < x \leqq \delta,\quad |y x^{-\frac{1}{p}} - \alpha_0| \leqq \varepsilon$$

ナル範囲ニ於ケル(A)ノ解ノ様子が分ル。

§3. $y = x^{\frac{1}{p}} u$ ト置ケバ(A)ハ

$$(\mathrm{C}) \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{\lambda u^p + a + x^{\frac{1}{p}}(\cdots\cdots)}{u^{p-1} + x^{\frac{1}{p}}(\cdots\cdots)} - \frac{1}{p}u$$

トナル。書カレテナイ部分ハ $x^{\frac{1}{p}}$, u ノ函数ト考ヘテ $(0,0)$ デ正則デアル、故ニ $x \to 0$ ノ時(C)ノ右辺ハ

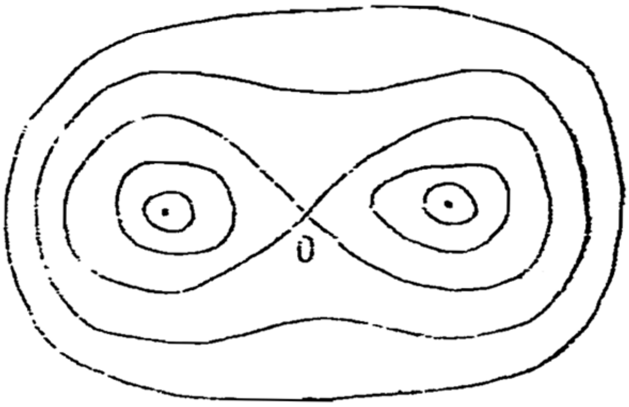
$$(\mathrm{C}') \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{\lambda u^p + a}{u^{p-1}} - \frac{1}{p}u$$

ノ右辺ニ収斂スル、(C′)ヲ積分スレバ

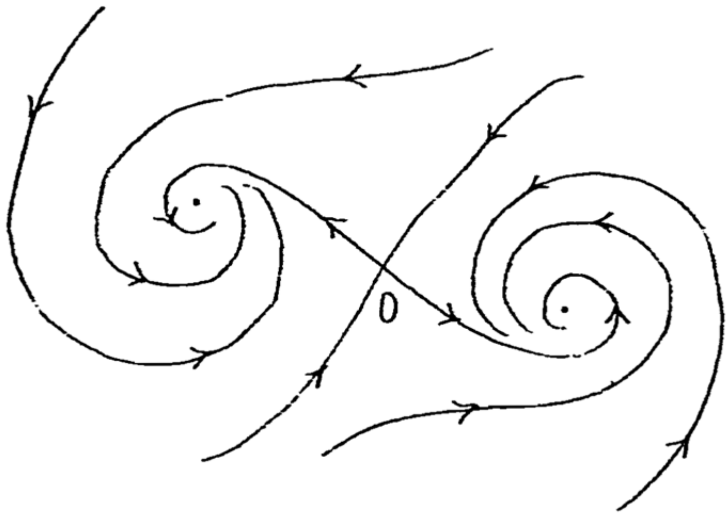
$$u^p = \frac{pa}{1-p\lambda} + C x^{p\lambda - 1}$$

ヲ得ル。$x \to +0$ ノ時 u が描ク曲線ハλノ實部 μ が $\frac{1}{p}$ ニ等シイナラバ第1圖ノヤウニ，$\mu > \frac{1}{p}$ ナラバ第2圖ノヤウニナル。

$\mu < \frac{1}{p}$ ナラバ第2圖ニ於イテ矢ノ向キヲ反對ニスレバヨイ。(圖ニ於イテハ $p=2$ トシタ)



第1圖



第２圖

§4. 今度ハ

$$0 < x < \delta, \quad M x^{\frac{1}{p}} < |y| < \Delta$$

ナル部分ヲ考ヘル、ソコデハ

$$\left| \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} - \frac{P_0(y)}{Q_0(y)} \right| < \varepsilon x^{\frac{1}{p}}$$

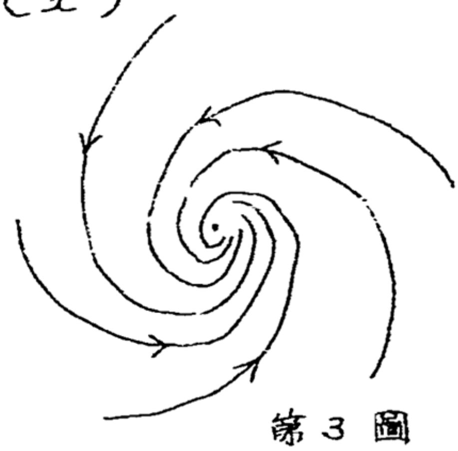
ガ成立シ、Mヲ大キク取ルコトニヨリεヲ幾ラデモ小サクスルコトが出來ル。故ニ(A)ト

$$(A') \quad x \frac{dy}{dx} = \frac{P_0(y)}{Q_0(y)}$$

トノ比較ニナル。(A′)ノ解ハ

$$y = Cx^{\lambda} + \cdots\cdots \equiv \varphi(Cx^{\lambda})$$

ナル形ニ書ケルカラ $x \to +0$ ノ時 y ガ描ク曲線ハ $\mu > 0$ ナラバ第３図ノヤウニナル。$\mu < 0$ ナラバ矢ノ向キヲ反對ニスレバヨイ、$\mu = 0$ ナラバ0ヲ内部



第３圖

ニ含ム閉曲線トナル。

§5. $0<\mu<\dfrac{1}{p}$ ナラバ

勝手ナCノ値ニ對シテ

$$(1)\qquad \lim_{x\to+0} x^{-\mu}[y-\varphi(Cx^{\lambda})]=0$$

トナルヤウナ(A)ノ解ガ唯一ツ存在スル、而モ

$$0<x_0<\delta,\quad Mx_0^{\frac{1}{p}}<|y(x_0)|<\Delta$$

ナル初期條件ヲ滿足スル(A)ノ解ハ適當ナCノ値ニ對シテ(1)ヲ滿足スル、更ニ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ノ y ニ關スル正則性カラ(1)ヲ滿足スル(A)ノ解ヲCノ函數ト考ヘタトキ $0<|C|<\infty$ デ一價正則トナルコトガ分ル、依ッテ其ノ解ハCノ *Laurent* 級數ニ展開サレル：

$$(\psi)\qquad y=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\psi_j(x)C^j.$$

此ノ展開式ハ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ガ $(0,0)$ デ正則トイフ假定ノ下ニ於テハ新シイモノデハナイ、此ノ展開式ヲ導キ出ス從來ノ方法ヲ念ノタメニ述べテ置ク。

$x=y^p\xi$ ト置ケバ

$$y\frac{d\xi}{dy}=\left(\frac{1}{\lambda}-p\right)\xi+\cdots\cdots\cdots$$

ナル形ニナル、コノ方程式ノ解ハ

$$\xi=Cy^{\frac{1}{\lambda}-p}F_1\left(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p},\ y\right)\qquad (F_1(0,0)=1)$$

ナル形ニ書ケル。コレカラ順次ニ

$$x=Cy^{\frac{1}{\lambda}}F_1\left(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p},\ y\right)$$

$$\left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda}=yF_2\left(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p},\ y\right)$$

$$y=\left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda}F_3\left(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p},\ \left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda}\right)$$

$$Cy^{\frac{1}{\lambda}-p}=C\left(\frac{x}{C}\right)^{1-p\lambda}F_4\left(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p},\ \left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda}\right)$$

$$Cy^{\frac{1}{\lambda}-p}=x\left(\frac{x}{C}\right)^{-p\lambda}F_5\left(x\left(\frac{x}{C}\right)^{-p\lambda},\ \left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda}\right)$$

ヲ得ル．コレカラ(4)ナル展開式ヲ得ルノデアル。併シ此ノ方法ハ途中デyヲ独立変数ニ取ッテ居ルカラ$P(x,y)$, $Q(x,y)$ガxニ関シテモ正則トイフ假定ヲ必要トシ、xヲ実変数トシタ場合ニハ使ヘナイ。

§6. 以上述ベタ所カラ次ノ結論ヲ得ル．

圖4,5ニ於テハ同心円ノ中心ハ0，半径ハ大キイ方ガΔ_1，小サイ方ガ$\Delta_2 x_0^{\frac{1}{p}}$デアル。$\Delta_1$, Δ_2ハ或キマッタ正ノ數デアルガ，Δ_2ノ方ハx_0ヲ小サク取ルコトニヨリ幾ラデモ小サクスルコトが出來ル。

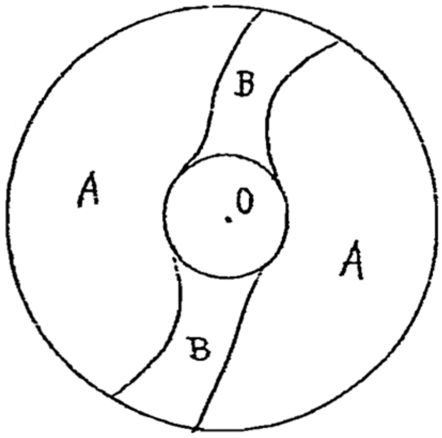
I. $\mu>\frac{1}{p}$ ナラバ，$y(x_0)=y_0$ヲ満足スル(A)ノ解ハy_0ガ第4図ニ於ケルAニ属スル時

$$\lim_{x\to+0} x^{-\frac{1}{p}}y(x)=\alpha。$$

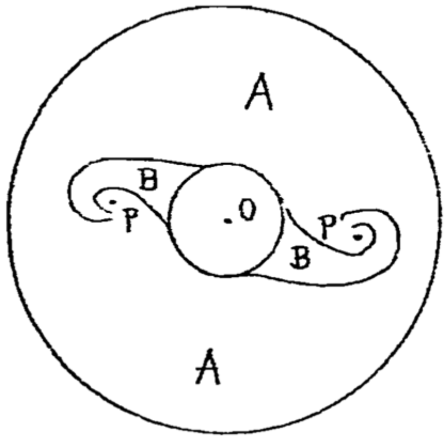
ヲ満足スル、y_0 ガ B ニ属スルナラバ $0, x_0$ ノ間ノ或 x ノ値デ $|y(x)|=\Delta_2 x^{\frac{1}{p}}$ トナル。

II. $\mu<0$ ナラバ，$y(x_0)=y_0$ ヲ満足スル (A) ノ解ハ y_0 ガ第5図ニ於ケル A ニ属スルトキ $0, x_0$ ノ間ノ或 x ノ値デ $|y(x)|=\Delta_1$ トナル。y_0 ガ B ニ属スルナラバ $0, x_0$ ノ間ノ x ノ或値デ $|y(x)|=\Delta_2 x^{\frac{1}{p}}$ トナル。

A, B ヲ分ツ曲線ノ漸近点 P（p 個アル）ニ y_0 ガ一致スル時ニハ其ノ解ハ (α) ナル形ニ展開サレル。



第４圖



第５圖

III. $0<\mu<\frac{1}{p}$ ナラバ，$y(x_0)=y_0$ ヲ満足スル (A) ノ解ハ y_0 ガ第5圖ニ於ケル A ニ属スルトキ (ψ) ナル形ニ展開サレル。y_0 ガ B ニ属スルナラバ，$0, x_0$ ノ間ノ或ル x ノ値デ $|y(x)|=\Delta_2 x^{\frac{1}{p}}$ トナル。A, B ヲ分ツ曲線ノ漸近点 P ニ y_0 ガ一致スル時ニハ其ノ解ハ (α) ナル形ニ展開サレル。

未ダ $\mu=0$ 又ハ $\frac{1}{p}$ ノ場合ガ残ッテ居ルシ補足スベキ事柄モアルガ、次條ニ報告スル積リデアル、兎ニ角此ノヤウ

ニシテ $\Delta_2 x^{\frac{1}{p}} \leqq |y| \leqq \Delta_1$ ナル範囲ニ於ケル解ノ様子ガ分ル、$|y| \leqq \Delta_2 x^{\frac{1}{p}}$ ノ部分ガ分ラナイノハ已ムヲ得ナイ、何故カトイヘバソコデハ $P_1(x, y) = a + \cdots\cdots\cdots$ ノ書カレテナイ部分ガ影響ヲ及ボスカラデアル。