236. 書 信（掛谷先生ヨリ高橋進一氏へ）

---------------（前 略）---------------

紙上談話會第60号の御論説を興味深く拝讀仕候

其際思ひ浮び候事別紙に書きつけ申候御一讀願上候

I の方は古くより色々の折に用ひられ居る事ではないかと思はれ申候

II の方 $\sqrt{2}$ なる限界は如何にして出され候か興味深く承り申候　別紙の二次方程式の取扱は計算又は理論に於て甚だ思ひ違あるやも知れず候よろしく御笑覧願上候

---------------（後 略）---------------

(I)　p.4ニアル條件 (5) ノ下ニアリテハ $f(x)=0$ ノ根ノ上限ハ

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots\cdots - x - 1 = 0 \qquad \text{(A)}$$

ノ正根 ρ_n ナリ。

〔証〕　(A) モ亦條件 (5) ヲ満足ス。而シテ $|x| > \rho_n$ ニ對シテハ一般ニ

$$|f(x)| = |a_0|\left|x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \cdots\cdots + \frac{a_n}{a_0}\right|$$

$$\geqq |a_0|\left||x|^n - \frac{a_1}{a_0}|x|^{n-1} - \cdots\cdots - \frac{a_n}{a_0}\right|$$

$$\geqq |a_0|\left(|x|^n - |x|^{n-1} - \cdots\cdots - 1\right) > 0$$

即チ x ハ根トナリ得ザルナリ。

(II) p.5 ニアル條件 (6) ノ下ニハ 1 ヨリ大ナル絶對値ノ根が存在シ得ベシ。 二次方程式ノ場合ニ就テ考ヘン。

$$x = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}, \qquad \theta \text{ 實數}$$

ヲ考ヘ，先ヅ θ ヲ正ニテ十分 0 ニ近ヅケレバ，θ ニ關シ

$$\frac{0+0x+x^2}{1+x+x^2} = i+(2i-1)\theta+\cdots\cdots\cdots$$

ナル展開が行ハレ，$i+(2i-1)\theta$ ノ amplitude ハ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ少シ大ナリ。從ツテ左辺ノ分數モ然リ。茲ニ於テ分母子ノ係數 $(1, 1, 1)$，$(0, 0, 1)$ ヲ十分少シク変ジテ (Q_2, Q_1, Q_0)，(P_2, P_1, P_0) トナシ

$$\frac{P_2+P_1x+P_0x^2}{Q_2+Q_1x+Q_0x^2} \qquad \text{(B)}$$

ノ amplitude ハ矢張リ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ少シ大ナラシメ乍ラ

$$0 < Q_2 < Q_1 < Q_0, \quad 0 < P_2 < P_1 < P_0 \qquad \text{(C)}$$

ナラシメ得ベシ。

(B) ニ於テ θ ヲ $-\frac{\pi}{2}$ トスレバ amplitude ハ 0 トナル。分母ノ zero-points ハ ω, ω^2 ニ近キが故ニ，此 amplitude ノ変化ハ連続トナリ或 $x\ (|x|=1)$ ニテ (B) ノ amplitude ハ $\frac{\pi}{2}$ 又ハ $-\frac{\pi}{2}$ トナル。前者ナラバ逆數ヲトレバヨシ。故ニ $-\frac{\pi}{2}$ トナレルモノトス。

即チ其ノ x ニ對シテ (B) ノ値が $-it\ (t>0)$ トナル。換言スレバ

$$(P_0+iQ_0t)x^2+(P_1+iQ_1t)x+(P_2+iQ_2t)=0$$

ガ大サ1ナル根ヲ持ツ。

茲ニ於テ十分1ニ近キ1ヨリ小ナルrヲトリ

$$P_0r^2=p_0,\quad P_1r=p_1,\quad P_2=p_2$$

$$tQ_0r^2=q_0,\quad tQ_1r=q_1,\quad tQ_2=q_2$$

ヲシテ(5)ナル條件ヲ滿足セシメ得ベク，其時

$$(p_0+iq_0)x^2+(p_1+iq_1)x+(p_2+iq_2)=0$$

ハ大サガ$\dfrac{1}{r}(>1)$ナル根ヲ有ス。