235. 微分法ニ就イテ III.

南雲道夫（阪大）

今度ハ普通ノ場合ニ於ケル複素変数ノ正則函数ニ倣ッテ，一般ノ線状空間ニ於ケル正則函数ヲ考ヘテ見ヨウ。ソノタメニハ空間ハ複素線状空間（complex linear space）

トスル。

先ヅ(準備ノタメ)特ニ独立変数ガ複素数ノ場合ヲ考ヘル。コノ場合ハ普通ノ複素正則函数論ト完全ニ並行デアル。

§4 複素數變數，正則函數

複素線狀空間

(i) $\mathfrak{L}$ ニ属スル任意ノ有限個ノ要素 $\mathfrak{a}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_n$ ニツイテ，複素数ニヨル一次結合

$$c_1\mathfrak{a}_1+\cdots\cdots+c_n\mathfrak{a}_n$$

($c_1, \cdots\cdots, c_n$ ハ複素数)ガ定義サレル。一次結合ニツイテハ普通ノ Vektor ノ一次結合ト同様ナ運算ガ行ナハレル。

(ii) $\mathfrak{L}$ ノ各要素 $\mathfrak{a}$ ニハ、ソノ絶對値 $|\mathfrak{a}|$ ナル實数ガ定義サレテヰル。$|\mathfrak{a}|$ ハ次ノ性質ヲ有スル。

$$|\mathfrak{a}|\geqq 0, \qquad (\mathfrak{a}=0)\rightleftarrows(|\mathfrak{a}|=0);$$
$$|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|\leqq|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|;$$
$$|c\mathfrak{a}|=|c||\mathfrak{a}| \qquad (c\text{ ハ複素數}).$$

以上ノ性質ヲ有スル時 $\mathfrak{L}$ ヲ複素線狀空間ト呼ブ。

$\mathfrak{L}$ ノ任意ノ二点ヲ $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ トスルトキ，$|\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2|$ ヲバ $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ 間ノ距離トイフ。之レニヨツテ $\mathfrak{L}$ 内ノ極限ガ定義サレル。以後 $\mathfrak{L}$ ハ完全ナ距離空間(Cauchy ノ収斂條件ガ成立スルコト)ト假定スル。

實数ニヨル一次結合ノミガ定義サレテアル線狀空間(之

ハ和ノミが定義サレテヰテ、絶對値ニツイテハ $|c\alpha|=|c||\alpha|$ が整數ノ c ノミニツイテ成立スルトキニハ、自然ニ之レヲ線狀空間ニ拡張スルコトが出來ル）ヲ特ニ<u>實線狀空間</u>トヨブ。

實線狀空間 $\mathfrak{R}$ ハ容易ニ複素線狀空間ニ拡ゲラレル。即チ α_1, α_2 ヲ $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ要素トスルトキニ，$\alpha_1+i\alpha_2$ ナル形式ノ集合ヲ $\mathfrak{L}$ トスレバヨイ。

但シ $|\alpha_1+i\alpha_2|=\sqrt{|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2}$ トスル。（一次結合ノ定義ハ自ラ明カデアロウ）

$\boxed{\text{正則函數}}$　$\mathfrak{F}(z)$ ヲバ複素數 z ノ函數デ $\mathfrak{F}\in\mathfrak{L}$（$\mathfrak{L}$ ハ複素線狀空間）トスル。

z_0 ノ近傍ニ於テ，$\mathfrak{F}(z)$ ノ微係數，即チ

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathfrak{F}(z+\Delta z)-\mathfrak{F}(z)}{\Delta z}=\frac{d\mathfrak{F}}{dz}$$

が存在スルトキ，$\mathfrak{F}(z)$ ハ <u>z_0 デ正則</u>デアルトイフ。（從ツテ $\mathfrak{F}(z)$ ハ z_0 ノ近傍デ正則デアル）

z_0 ニ於ケル正則函數 $\mathfrak{F}_1(z)$, -------, $\mathfrak{F}_n(z)$ ノ一次結合 $c_1\mathfrak{F}_1(z)+\text{-------}+c_n\mathfrak{F}_n(z)$ ハ又正則デアル。（積ハ一般ニ定義サレテナイ）

z_0 ニ於ケル正則函數 $\mathfrak{F}(z)$ ニ普通ノ正則函數 $w(z)$〔w ノ値が複素數〕ヲカケタモノ，$w(z)\mathfrak{F}(z)$ モ亦正則函數トナル。（証明容易）

$\boxed{\text{Cauchy ノ積分定理}}$　Gauß 平面内ニ於ケル單一連結領域 $\mathfrak{D}$ デ $\mathfrak{F}(z)$ が正則ナラバ，$\mathfrak{D}$ 内ノ閉曲線（長

サ有限) $\mathfrak{C}$ ニ沿フテノ積分ハ恒ニ零トナル;

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = 0$$

但シ積分ノ意味ハ普通ノ場合ト同様ニ

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu)\Delta z_\nu = \int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz,$$

$\Delta z_\nu = z_\nu - z_{\nu-1}$. $z_0, z_1, \cdots\cdots, z_n$ ハ $\mathfrak{C}$ 上ニ順次ニトッタ点, ζ_ν ハ $z_{\nu-1}$ ト z_ν トノ間ニアル $\mathfrak{C}$ 上ノ点, $\Delta = \operatorname{Max}_\nu |\Delta z_\nu|$. z_0, z_n ハ $\mathfrak{C}$ ノ始メノ点ト終リノ点デアル。

証明ハ普通ノ場合ト全ク同様ニ出来ル。

即チ $\mathfrak{C}$ ヲ先ヅ多角形デ近似サセル。

次ニソノ多角形ヲ三角形ニ分割スル。カクテ $\mathfrak{D}$ 内ノ三角形 Δ ニツイテ定理ヲ証明スレバヨイコトニナル。

三角形ニツイテハ, Δ ノ各辺ヲ二等分スルコトニヨリ之レヲ四ツノ合同ナ三角形ニ分ケ、ソノ内デ積分ガ最大ナモノ Δ_1 ヲトリ出シ、之レヲ再ビ四等分スル。カヽル手続ヲ無限ニ繰返スコトニヨリ $\mathfrak{D}$ 内ノ一点 z_0 ニ収斂スルヤウナ三角形ノ列 $\{\Delta_n\}$ ヲ得ル。z_0 ニ於イテ $f(z)$ ガ微分可能デアルカラ、容易ニ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ n ガ充分大ナラバ

$$\left|\int_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| < \varepsilon\frac{M}{4^n} \qquad (M = 一定).$$

故ニ

$$\left|\int_{\Delta} f(z)\,dz\right| < \varepsilon M,$$

従ッテ $\displaystyle\int_{\Delta} f(z)\,dz = 0$　　　（証明了）

$\boxed{\text{Cauchy ノ積分表示}}$　之モ普通ノ場合ト全ク同様ナ考ヘニヨッテ得ラレル。即チ $\mathfrak{D}$ 内デ $\mathfrak{C}$ ハ z ヲ内ニ含ム単一ナ閉曲線トシ、z ヲ中心ニ充分小サク円 K ヲ画ケバ $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ハ ζ ノ函数トシテ $\zeta = z$ 以外デ正則ナルコトニヨリ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

所デ円 K ノ半径ヲカギリナク小サクスルトキハ，極限ニ於テ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,dz = f(z).$$

即チ
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

之レカラ順次ニ

$$\frac{d^n f}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

ヲ得ル。従ッテ正則函数ハ $\mathfrak{D}$ ニ於イテ無限回連続微分可能デアル。

$\boxed{\text{Taylor 級数}}$　$f(z)$ ノ正則域内ノ一点 a ヲ中心トシテ $f(z)$ ハ Taylor ノ級数（z ノ巾級数）ニ展開サレル。

（証明ハ普通ノ場合ト同様）即チ C ヲバ a ヲ中心トスル円デ、ソノ周及ビ内部共ニ $\mathfrak{D}$ ニ属スルモノトスレバ

$$\mathfrak{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\mathfrak{f}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

所ガ $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$ ノ時 $\dfrac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$.

従ッテ $\mathfrak{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\mathfrak{f}^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$.

但シ $|z-a|<r$. r ハ a カラ $\mathfrak{D}$ ノ境界マデノ距離デアル。

次ニ逆ニ $|z-a|<r$ デ収斂スル巾級数

$$\mathfrak{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\,(z-a)^n \qquad (\alpha_n\in\mathfrak{L})$$

ハ $|z-a|<r$ デ正則ナ函数ヲ表ハス．何トナレバ一般ニ $\mathfrak{D}$ デ正則ナ函数ノ級数

$$\mathfrak{f}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{f}_n(z)$$

ガ $\mathfrak{D}$ ノ内部デ一様ニ収斂スルトキハ，Cauchy ノ積分表示ニヨリ

$$\mathfrak{f}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\mathfrak{f}_n(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\mathfrak{f}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

之カラ $\mathfrak{f}(z)$ ガ z ニツイテ微分可能シシカモ級数ハ項別ニ

微分可能）即チ正則ナルコトガ証明サレル。

尚ホ孤立特異点ノ近傍デハ Laurent ノ級数ニ展開出来ルコトモ全ク普通ノ場合ト同様デアル。Liouvill ノ定理（全平面デ正則、且ツ有界ナラバ constant）ヤ Riemann ノ定理（孤立特異点ノ近傍デ一意有界ナラバソノ特異点ハ除去可能）ナドモスベテ普通ノ場合ト同様ニ証明出来ル。

又、極（Pol）ハ Laurent 展開ノ主部ガ有限項ナルモノトシテ定義サレル、シカシナガラ此ノ場合ニハ逆数ガ考ヘラレナイカラ正則函数ノ逆数トシテ定義スルコトハ出来ナイ。又真性特異点（孤立ノ場合）ニ於ケル Weierstrass-Casorati ノ定理ヤ Picard ノ定理ニ相当スルモノハ一般ニハ成立セヌデアラウ。（$\mathfrak{f}$ナル空間ノ次元ガ大キイ事カラ直ニ想像出来ル）

$\boxed{\text{解析接続}}$ 先ヅ一致ノ定理ガ成立スル。何トナレバ $\mathfrak{f}(z)$ ガ常数デナイカギリ、Taylor 展開ニヨリ

$$\mathfrak{f}(z)-\mathfrak{f}(a)=\mathfrak{a}_m(z-a)^m+o(|z-a|^m)\qquad \mathfrak{a}_m\neq 0.$$

之レカラ $|z-a|$ ヲ充分小サクトレバ、$\mathfrak{f}(z)$ ハ $\mathfrak{f}(a)$ ト異ナル。従ツテ二ツノ一致シナイ正則（$z=a$デ）ナ函数ハzノ孤立点デノミ等シクナリ得ル。

正則函数ハ一点 $z=a$ ニ於ケル Taylor 展開ニヨッテ全領域ノ値ガ確定セネバナラヌ。即チ正則函数ハ確定シタ解析接続ヲ有スル。ソノ結果多價函数ニナルコトナク一價函数

ニナルコトモアル。スベテ普通ノ解析函数ノ場合ト同様デアル。

$\boxed{\text{多元正則函數}}$ 多元正則函数モ亦普通ノ場合ト全ク同様ニ定義サレ、又同様ナ性質ヲ持ツ.

即チ $\mathfrak{z}(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_k)$ ガ $z_\lambda = a_\lambda$ ノ近傍デ連続デ $z_1, \cdots\cdots, z_k$ ニツイテ微分可能ナルトキ, $\mathfrak{z}(z_1, \cdots\cdots, z_k)$ ハ $(a_1, \cdots\cdots, a_k)$ デ正則デアルト云フ.

多元正則函数ニツイテハ Cauchy ノ積分表示

$$\mathfrak{z}(z_1, \cdots, z_k) = \frac{1}{(2\pi i)^k}\int_{C_1}\cdots\int_{C_k}\frac{\mathfrak{z}(\zeta_1, \cdots \zeta_k)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_k - z_k)}d\zeta_1\cdots d\zeta_k$$

ガ成立シ、従ッテ又 $\mathfrak{z}(z_1, \cdots\cdots, z_k)$ ガ $(z_1, \cdots\cdots, z_k)$ ニツキ何回デモ微分可能ナルコトガ証明サレル。即チ

$$\frac{\partial^{n_1 + \cdots + n_k}\mathfrak{z}}{\partial z_1^{n_1}\cdots\partial z_k^{n_k}} = \frac{n_1!\cdots n_k!}{(2\pi i)^k}\int_{C_1}\cdots\int_{C_k}\frac{\mathfrak{z}(\zeta_1, \cdots, \zeta_k)d\zeta_1\cdots d\zeta_k}{(\zeta_1 - z_1)^{n_1+1}\cdots(\zeta_k - z_k)^{n_k+1}}.$$

ソレカラ又 Taylor 級数ニ展開サレルコトモ証明出来ル。

§5. 一般ノ正則函數

次ニ一般ノ複素線状空間ニ属スル独立変数ノ正則函数ヲ考ヘル。之ニ対シテ §4 ノ結果ハ補助ノ役目ヲナス。
先ヅ（複素）線状函数ヲ定義スル。

$\boxed{\text{線狀函數又ハ線狀寫像}}$

$\mathfrak{L}_1$ 及ビ $\mathfrak{L}_2$ ヲ共ニ複素線状空間トシ、$\mathfrak{z} \in \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{y} \in \mathfrak{L}_2$ トスルトキ, 次ノ性質ヲ有スル函数 $\mathfrak{y} = f(\mathfrak{z})$ ヲ線状函数

ト云フ。

(i) $f(c_1\mathfrak{x}_1+\cdots\cdots+c_n\mathfrak{x}_n)=c_1f(\mathfrak{x}_1)+\cdots\cdots+c_nf(\mathfrak{x}_n)$.

但シ $c_1,\cdots\cdots,c_n$ ハ複素数.

(ii) $|f(\mathfrak{x})|\leqq M|\mathfrak{x}|$ ナル一定ノ正数 M ガ存在スル。

線状函数 $\mathfrak{y}=f(\mathfrak{x})$ ニヨル $\mathfrak{L}_1$ カラ $\mathfrak{L}_2$ ヘノ寫像ヲ線状寫像トヨブ。線状寫像ヲ T デ表ハセバ

$$(c_1T_1+\cdots\cdots+c_nT_n)\mathfrak{x}=c_1T_1\mathfrak{x}+\cdots\cdots+c_nT_n\mathfrak{x}$$

〔$c_1,\cdots\cdots,c_n$ ハ複素数〕ニヨリ $T_1,\cdots\cdots,T_n$ ノ一次的結合ガ定義サレル。次ニ

$$|T|=\frac{|T\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{x}|} \text{ ノ上限 } \quad (\mathfrak{x}\in\mathfrak{L}_1)$$

ニヨリ T ノ絶對値ヲ定義スレバ, $\mathfrak{L}_1$ カラ $\mathfrak{L}_2$ ヘノ線状寫像ノ集合ハ又一ツノ複素線状空間ヲ作ル。之ヲ〔$\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)$〕デ示ス。

$\boxed{\text{正則函数}}$ $\mathfrak{x}\in\mathfrak{D}\subset\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{D}$ ハ開集合トシ, $\mathfrak{x}$ ヲ独立変数トスル函数 $\mathfrak{y}=f(\mathfrak{x})$, $(\mathfrak{y}\in\mathfrak{L}_2)$ ニ於テ, $\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0=\Delta\mathfrak{x}$, $f(\mathfrak{x}_0+\Delta\mathfrak{x})-f(\mathfrak{x}_0)=\Delta\mathfrak{y}$ トスルトキ,

$$\Delta\mathfrak{y}=T(\mathfrak{x}_0)\Delta\mathfrak{x}+\varepsilon(\mathfrak{x}_0,\Delta\mathfrak{x})$$

$$|\varepsilon(\mathfrak{x}_0,\Delta\mathfrak{x})|=o(|\Delta\mathfrak{x}|),$$

——但シ $T(\mathfrak{x}_0)$ ハ $\mathfrak{L}_1$ カラ $\mathfrak{L}_2$ ヘノ線状寫像トス,——ナルトキ, $f(\mathfrak{x})$ ハ $\mathfrak{x}_0$ ニ於イテ微分可能, $T(\mathfrak{x}_0)$ ヲ $f(\mathfrak{x})$ ノ $\mathfrak{x}_0$ ニ於ケル微分商ト云ヒ, 之レヲ $f_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}_0)$ 又ハ

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0}$ デ示ス。微分商ハ $\mathfrak{L}_1$ カラ $\mathfrak{L}_2$ ヘノ線状寫像デアル。微分商ノ一義性ノ證明ハ §1（60号40頁）ト全ク同様ニ出來ル。

$y=f(x)$ ガ x_0 ノ近傍デ微分可能ナルトキ，$f(x)$ ハ x_0 ニ於テ正則（regular）デアルトイフ。

正則函数 $f_1(x), \text{-------}, f_n(x)$ ノ一次結合 $c_1 f_1(x)+\text{-------}+c_n f_n(x)$ モ亦正則デアル。（積ハ一般ニ定義サレテナイ） $y=f(x)$ ガ x_0 デ正則，$z=g(y)$ ガ y_0 デ正則，$y_0=f(x_0)$ ナル時ニハ

$$z=g(f(x))$$

モ亦 x_0 デ正則デアル。シカシテ微分商ハ

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x_0}=\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y_0}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0}$$

トナル〔證明ハ §1（60号43頁）ト全ク同様〕.

特ニ $y=f(x)$ ガ x_0 デ正則，$x(z_1, \text{-------}, z_k)$ ガ複素変数 $(z_1, \text{-------}, z_k)$ ニツイテ $(a_1, \text{-------}, a_k)$ デ正則，$x(a_1, \text{-------}, a_k)=x_0$ ナラバ，

$y(z_1, \text{-------}, z_k)=f(x(z_1, \text{-------}, z_k))$ ハ $(a_1, \text{-------}, a_k)$ デ正則デアル。

高階微分可能性 次ニ正則函数ハ何回デモ微分出來ルコトヲ證明スル。

先ヅ x_0 ノ近傍デ $f(x)$ ガ一様ニ微分可能ナルコトヲ

示ソウ。

$f(z)$ ガ z_0 デ正則ナラバ，$f(z)$ ハ <u>z_0 ノ近傍デ有界</u>デアル。即チ $|z-z_0|<r$ トスレバ

$$|f(z)|\leqq M$$

ナル正ノ数 r ト M トガ存在スル。勿論 $f(z)$ ハ $|z-z_0|<r$ デ正則トスル。今 $|z-z_0|<r_1$，$|\lambda\Delta z|\leqq r_2$，$(r_1+r_2=r)$ トスレバ（λ ハ複素数）$f(z+\lambda\Delta z)$ ハ λ ニツキ正則トナルカラ、Cauchy ノ積分表示ニヨリ C ヲ $|\mu|=\rho\ (\rho|\Delta z|=r_2)$ ナル円トスルトキ，$|\lambda|<\rho$ ノ時

$$f(z+\lambda\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z+\mu\Delta z)}{\mu-\lambda}d\mu.$$

所ガ

$$\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu^2}+\frac{\lambda^2}{\mu^3\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}，\quad \text{且ツ}$$

$$f_z(z)\cdot\Delta z=\frac{\partial}{\partial\lambda}f(z+\lambda z)_{\lambda=0}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z+\mu\Delta z)}{\mu^2}d\mu$$

ニヨリ

$$f(z+\lambda\Delta z)-f(z)=\lambda f_z(z)\cdot\Delta z+\frac{\lambda^2}{2\pi i}\int_C\frac{f(z+\mu\Delta z)}{\mu^3\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}d\mu.$$

ソコデ $\rho>1$, $\lambda=1$ トスレバ,

$$\left|f(z+\Delta z)-f(z)-f_z(z)\Delta z\right|<\frac{M}{\rho^2\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}.$$

所ガ $|\Delta z|=\dfrac{r_2}{\rho}$ ニヨリ，$|\Delta z|<\delta(\varepsilon)$ トスレバ，

$|z - z_0| < r_1 \ (r_1 < r)$ ニ於テ一様ニ

$$\left| f(z+\Delta z) - f(z) - f_z(z)\Delta z \right| < \varepsilon |\Delta z|$$

次ニ $f_z(z)$ ノ微分可能性ヲ証明シヨウ。

$$f_z(z)\cdot z_1 = \frac{\partial}{\partial\lambda} f(z+\lambda z_1)_{\lambda=0} \text{ ニヨリ}$$

$$f_z(z_0+\Delta z)\cdot z_1 - f_z(z_0)\cdot z_1$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z_0+\Delta z+\lambda z_1) - f(z_0+\lambda z_1)}{\lambda^2} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_z(z_0+\lambda z_1)\cdot\Delta z}{\lambda^2} d\lambda + o(|\Delta z|).$$

上ノ関係ハ $|\lambda z_1| \leqq r_1 \ (r_1 < r)$ ニ於テ一様ニ成立スル。

$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_z(z_0+\lambda z_1)\cdot\Delta z}{\lambda^2} d\lambda$ ハ Δz ニツキ線状函数デアル。〔$f_z(z+\lambda z_1)\Delta z$ ハ $|\lambda z_1| < r_1 \ (r_1 < r)$ デ Δz ガ有界ナルカギリ有界デアル〕即チ（z_0 ハソノ近傍デ変化シ得ルカラ），$f_z(z)$ ハ更ニ微分可能デアル（故ニ z_0 デ正則デアル！）

以下 $f_z(z)$ ニツイテ同様ナ考察ヲクリ返セバ，$f(z)$ ハ限リナク微分可能デアル.

$\boxed{\text{Taylor 展開}}$ $f(z)$ ガ z_0 デ正則ナラバ $f(z_0+\lambda\Delta z)$ ハ $|\lambda\Delta z| < r$ ナルカギリ λ ニツキ正則デアルカラ、λ ニ関シテ $|\lambda| < \dfrac{r}{|\Delta z|}$ ニ於テ Taylor 級数ニ展開サレル。

$$f(z_0+\lambda\Delta z)=f(z_0)+f'(z_0,\Delta z)\lambda+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0,\Delta z)}{n!}\lambda^n+\cdots$$

但シ $f^{(n)}(z_0,\Delta z)=\left[\dfrac{d^n}{d\lambda^n}f(z_0+\lambda\Delta z)\right]_{\lambda=0}$ 所ガ容易＝

$$\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}f(z_0+\lambda\Delta z)\right]_{\lambda=0}=f_{\underbrace{zz\cdots\cdots z}_{n\text{個}}}(z_0)\underbrace{\Delta z\Delta z\cdots\cdots\Delta z}_{n\text{個}}$$

$$=f_{z^n}(z_0)\Delta z^n.$$ （之ハ便宜上ノ記号ニスギナイ!）

従ッテ $|\Delta z|<r$ ノ時，$\lambda=1$ トスレバ，

$$f(z_0+\Delta z)=f(z_0)+f_z(z_0)\Delta z+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}f_{z^n}(z_0)\Delta z^n+\cdots\cdots$$

ヲ得ル。（$|\Delta z|\leqq r'<r$ デ一様収斂）

大分平凡ナコトバカリ長ク書イタ。殊ニ§4ハ全ク普通ノ函数論ノ入門ヲソノマヽ繰返シタノニスギナイ。冗漫ノ点ハ何卒御寛恕ヲ乞フ。