230. 或種ノ積分方程式ニ就イテ(II)

泉　信一(東北大)
北川敏男(阪大)

§3. 積分方程式 $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-t)f(t)dt$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-t)f(t)\,dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニ於イテ、任意ノ整数 n ニ對シテ常ニ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|K(t)|\,t^{n}\,dt$$

が存在シ、且ツ

$$\sqrt[n]{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathbb{K}(t)\right| t^{n} dt} = O(1) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ナリト假定スル。

然ルトキ、(1) ヲミタス有階次數 *finite order* ノ整函數 $f(x)$ ヲ求メヨウ。

コノトキ明カニ、(1) ノ右辺ノ積分ハ存在スル。コノタメニハ，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha|t|^{k}}\left|\mathbb{K}(t)\right| dt$$

が任意ノ $\alpha, k > 0$ ニ對シテ存在スルコトヲ云フテオケバヨロシイ。

$$\int_{-T}^{T'} e^{\alpha|t|^{k}}\left|\mathbb{K}(t)\right| dt = \int_{-T}^{T'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha|t|^{k})^{n}}{n!}\left|\mathbb{K}(t)\right| dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n}}{n!}\int_{T}^{T'}|t|^{kn}\left|\mathbb{K}(t)\right| dt$$

蓋シ，

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(|t|^{k}\alpha\right)^{n}}{n!}$ ハ $-T \leqq t \leqq T'$ ニテ一様ニ $e^{\alpha|t|^{k}}$ ニ收斂スルカラ、積分ヲ中ヘ入レルコトが許サレル。

尚 k ヲ固定スルトキ

$$\sqrt[n]{\int_{-\infty}^{\infty}|t|^{kn}\left|\mathbb{K}(t)\right| dt} = O(1)$$

ソレ故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{kn} |\mathrm{K}(t)| dt$$

ハ存在スル。カクシテ

$$\lim_{T, T' \to \infty} \int_{-T}^{T'} e^{\alpha|t|^k} |\mathrm{K}(t)| dt$$

ハ存在スル。

従ッテ

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{K}(x-t) f(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{K}(t) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} f^{(n)}(x) \right\} dt \cdots\cdots\cdots (3)$$

次ニ(3)ノ右辺ノ積分ノ中ノ級数ハ一様收斂ダカラ、任意ノ $T>0$ 及ビ $T'>0$ ニ對シテ

$$\int_{-T}^{T'} \left\{ \mathrm{K}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} f^{(n)}(x) \right\} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \int_{-T}^{T'} \mathrm{K}(t) (-t)^n dt$$

又 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{K}(t)(-t)^n dt$ ハ各 n ニツイテ存在シ，更ニ、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} K_n \quad ハ \quad |K_n| \leqq \mathrm{K} \quad (n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

トナル様ナ任意ノ $\{K_n\}$ ニツイテ一様收斂デアルカラ

$$\lim_{T,T'\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\int_{-T}^{T'}K(t)(-t)^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}K(t)(-t)^n dt$$

依ツテ (3) カラ

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}K(t)(-t)^n dt$$

故ニ

$$a_n=\int_{-\infty}^{\infty}K(t)(-t)^n dt$$

トオキ

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}f^{(n)}(x) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

之レ無限次ノ微分方程式デアル。(6)ニ Valiron ノ定理ヲ應用スルタメニ (6) ノ母函數

$$g(z)=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$$

ノ order 及ビ type ヲ調ベテ見ヨウ。$g(z)$ ノ order ヲ ρ トスルトキ

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\lg n}{\lg\left|\frac{n!}{a_n}\right|}$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\lg n}{n\lg n-\lg|a_n|+O(n\lg n)}$$

然ルニ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg|a_n|}{n\lg n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\lg O(1)}{n\lg n}=0$$

次ニ(4)カラ

$$n\sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n!}\right|}=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}(t)(-t)^n dt\right|}$$

$$=\sqrt[n]{\sqrt{n}\,e^n O(1)}<\infty$$

故ニ、$g(z)$ハ *maximal type* ニナラナイ。

依ッテ *Valiron* ノ定理ガ應用出來ル。

乃チ次ノ定理ガ得ラレル。

定理3. $\mathrm{K}(t)$ ガ $(-\infty,\infty)$ デ定義サレ，任意ノ整數 n ニツイテ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{K}(t)|\,t^n dt$$

ガ存在シ、且ツ

$$\sqrt[n]{\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{K}(t)|\,t^n dt}=O(1)$$

ナルトキニハ，

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}(x-t)f(t)dt$$

ヲミタス有限次數ノ整函數 $f(x)$ ハ

$$f(x)=\sum_n P_n(x)e^{\lambda_n x}$$

ト書クコトガ出來ル。コヽニ λ_n ハ

$$0=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}(t)(-t)^n dt$$

ノ零点デ $p_n(x)$ ハ λ_n ノ multiplicity μ_n ヨリ低イ次数ノ多項式デアル。

但シ、コヽニ $\dfrac{\mu_n}{\lambda_{n+\mu_n}}\to 0$ ナリトスル。

3. 定理3ニ於イテ $\mathrm{K}(x)$ ニ関スル條件ヲ弱クシ、且ツ $f(x)$ ニ関スル條件ヲ強クシヨウ。

今 $K(x)$ ハ任意ノ有限區間デ積分可能デ、且ツ

$$K(x)=O(e^{-c|x|})$$

コヽニ c ハ定数デアル。

$f(x)$ ハ整函數デ且ツ

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|}\leqq c'<c$$

トスル。

然ルトキ

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}(x-t)f(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}(t)f(x-t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}(t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}f^{(n)}(x)\right)dt$$

然ルニ

$$\left|\mathrm{K}(t)\sum_{n=0}^{m}\frac{(-t)^n}{n!}f^{(n)}(x)\right|\leqq\left|\mathrm{K}(t)\right|e^{c|t|}\cdot e^{-c|t|}\sum_{n=0}^{m}\frac{(c'|t|)^n}{n!}$$

右辺ノ第一因數ハ假定カラ有限デ、第二因数ハ$(-\infty,\infty)$デ積分可能ナ函数 $e^{-(c-c')|t|}$ ヨリ小サイ、故ニ Lebesgue ノ定理カラ

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{K}(t)(-t)^{n}dt$$

故ニ

$$a_n=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{K}(t)(-t)^{n}dt$$

トオクトキ，無限次ノ方程式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}f^{(n)}(x)$$

ヲ得ル。

4. 然ルニ

$$\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}=\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathbb{K}(t)\,t^{n}\right|dt}$$

$$=\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathbb{K}(t)\right|e^{c|t|}\cdot e^{-c|t|}|t|^{n}dt}$$

$$=\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c|t|}|t|^{n}dt}\,(1+o(1))$$

$$=\frac{1}{c}\bigl(1+o(1)\bigr)$$

故ニ‥‥‥ノ結果ガ應用出來ル。

$$1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}(t)(-t)^n dt = 1-\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{K}(t)(-tz)^n dt$$

$$= 1-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}(t)e^{-tz}dt$$

右辺ノ $|R(z)|\leqq c'$ ニオケル零点ノ数ハ有限デアル。[1]

故ニ Dairs ノ定理カラ次ノ定理ガエラレル。

定理4. $\mathrm{K}(x)$ 及ビ $f(x)$ ハ $(-\infty,\infty)$ デ定義セラレテヰル。

$\mathrm{K}(x)$ ハ任意ノ有限區間デ連続デ，且ツ

$$\mathrm{K}(x)=O(e^{-c|x|})$$

トナルヤウナ $c>0$ ガアルトスル、又 $f(x)$ ハ整函数デ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|}\leqq c'<c$$

トナル様ナ $c'>0$ ガ存在スルトスル。

然ルトキ，$f(x)$ ガ

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}(x-t)f(t)\,dt$$

ヲ満足スルナラバ

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{N}\mathrm{P}_\nu(x)\,e^{\lambda_\nu x}$$

コヽニ λ_ν ハ

$$1-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}(x)\,e^{-zx}dx=0$$

1) Paley-Wiener, loc. cit., Chept., IV.

ノ根ノウチ $|\lambda_\nu| < C'$ ナルモノトシ，$P_\nu(x)$ ハ λ_ν ノ multiplicity ヨリ低次ノ多項式デアル。

注意：定理ニオイテ條件（7）ノ代リニ

$$K(x) = O(p(x))$$

ヲオキカヘルコトが出來ル、コヽニ $p(x)$ ハ pos., even デ且ツ

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{c|x|} dx < +\infty$$

トナルトスル。尚 $K(x)$ ハ有限個ノ不連續点ヲモツモ差支ヘハナイ。