227. 微分法ニ就イテ, II

南 雲 道 夫（阪大）

前号ノ論文221ニ於ケル内容カラ、已ニ私ノ目的ガ如何ナルモノカハ大体御ワカリノコトヽ思フ。筆者ノ目的ハ實函数論的ナ方面（正則性ノ假定ヲ減ズルコトニヨリ一般的ナ結果ヲ目指スモノ）デハナクテ、ムシロ正則性ヲ保チナガラ微分法ノ適用範囲ヲ拡大スルニアル。即チ有限次元ノ函数ノミナラズ函数空間ノ如キモノニモ共通スル微分法ヲ論ズルコトガ主眼デアル。ソノタメニ筆者ハ線状函数ヲ基礎トシ、無限小ナ部分ヲバ線状函数ト見做スコトヲ微分法デアルト考ヘル。　從ッテ微分法ノ對象ガ線状空間内ニカギラレタノデアル。

以上ガ私ノ考ヘノ全部デアル。本質的ニハ別ニ新ラシイモノデハナイ、只アマリニ文献ニ暗イノデ、未ダカヽルコトガ表面カラ取扱ハレテアルコトヲ知ラナイ，切ニ識者ノ御教示ヲ仰グ所以デアル。

§2. 獨立変數ガ實數ノ場合

此ノ論文デハ、独立変数モ従属変数モ一般ノ線状空間ノ要素デアルモノヲ主眼トスルノデアルガ、特ニ独立変数ガ實数ノ場合ヲ考ヘルコトハ補助トシテ必要デアル。

tガ實数ノ時ニハ，

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathfrak{x}(t+\Delta t)-\mathfrak{x}(t)}{\Delta t}$$

デ、$\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ ハ $\mathfrak{x}$ ト同ジ線狀空間 $\mathfrak{L}$ ニ属スル。此ノ場合ニハスベテ普通ノ微分法ト同樣ニ考ヘラレル。

$\boxed{\frac{d\mathfrak{x}}{dt}=0\ \text{ニ就テ}}$　一般ニ $\frac{dy}{d\mathfrak{x}}=0$ ナルトキ $\mathfrak{x}$ ノ領域ガ連結ナラバ $y=$ 一定ナルコトヲ、スデニ前号デ証明シタ、併シ前号デハ"一般ノ線狀空間 $\mathfrak{L}$ ニ含マレタ二次元ノ線狀空間デ定義サレタル線狀函數（実數値）ハ、$\mathfrak{L}$ 全体デ連續ナ線狀函數ニ拡張出來ル"トイフ定理ヲ用ヒタ、シカシソノ定理ノ証明ハ超限的論法ニヨルノデアル。

$\frac{dy}{d\mathfrak{x}}=0$ ナル問題ハ $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(t)$〔$t$ ハ實変數〕トオクコトニヨリ容易ニ、$\frac{d\mathfrak{x}}{dt}=0$ ナル形式ノ問題ニ改メラレル。此ノ場合ニツイテ $\mathfrak{x}=$ 一定ナルコトハ直接ニ証明出來ル。ソノ考ヘハ寺阪君ガ暗示サレタモノデアル。

$|\mathfrak{x}(t_2)-\mathfrak{x}(t_1)|$ ヲバ區間〔$t_1,\ t_2$〕ニ於ケル $\mathfrak{x}(t)$ ノ変化ト名付ケル。問題ハ區間〔$0,1$〕ニ於ケル $\mathfrak{x}(t)$ ノ変化 $|\mathfrak{x}(1)-\mathfrak{x}(0)|$ ガ零ナルコトヲ証明スレバヨイ。〔$0,1$〕ヲ二等分シ,〔$0,\frac{1}{2}$〕ト〔$\frac{1}{2},1$〕ノ内デ $\mathfrak{x}(t)$ ノ変化ノ大ナル（小ナラザル）方ノ區間ヲ I_1 ト名付ケ, I_1 ニ於ケル $\mathfrak{x}(t)$ ノ変化ヲ $v(\mathrm{I}_1)$ デ示セバ,

$$|\mathfrak{x}(1)-\mathfrak{x}(0)|\leqq 2v(\mathrm{I}_1).$$

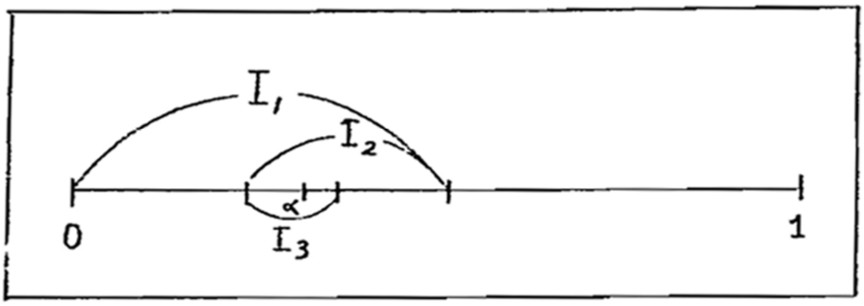
次ニ I_1 ヲ更ニ二ツノ區間ニ等分シ、ソノ内デ $\gamma(t)$ ノ変化ノ大ナル（小ナラザル）方ヲ I_2 トスレバ，

$$\left|\gamma(1)-\gamma(0)\right| \leqq 4\,v(I_2).$$

以下同様ニシテ

$$\left|\gamma(1)-\gamma(0)\right| \leqq 2^n v(I_n),$$

$$[0,1] \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots\cdots \supset I_n \supset \cdots\cdots.$$



スベテノ I_n ニ共通ナ一点ヲ α トスル。

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_\alpha = 0$$

ナルニヨリ，

$$\alpha-\delta(\varepsilon)<t_1 \leqq \alpha \leqq t_2 < \alpha+\delta(\varepsilon) \text{ トスレバ，}$$

$$\left|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\right| \leqq \varepsilon(t_2-t_1)$$

故ニ充分 n が大ナルトキ，$v(I_n) \leqq \varepsilon\cdot(I_n \text{ ノ長サ}) = \varepsilon\dfrac{1}{2^n}$.

従ッテ

$$\left|\gamma(1)-\gamma(0)\right| \leqq \varepsilon.$$

故ニ（$\varepsilon \to 0$ トスレバ）$\gamma(1)=\gamma(0)$.　（証明了）

$\boxed{\int_a^b \gamma(t)\,dt}$　独立変数 t が實数、$\gamma(t)$ が <u>t ノ連続函数</u> ナラバ、ソノ積分（*Riemann* 積分）ハ、普通ノ

場合ト同様ニ、tノ區間ヲ細分シタ場合ノ和ノ極限トシテ定義サレル。

$$\int_a^b \mathfrak{x}(t)\,dt = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{x}(\tau_i)\Delta t_i,$$

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1},\ \ t_0 = a,\ \ t_n = b,\ \ t_{i-1} < \tau_i < t_i;$

$\Delta = \underset{i}{\mathrm{Max}}\,(\Delta t_i)$. 但シ $a < b$ トス。

$a > b$ 又ハ $a = b$ ノトキハ

$$\int_a^b = -\int_b^a$$

ニヨッテ定義スル。

積分ノ存在ハ，獨立變數ガ閉區間 $[a, b]$ ニ屬シ、從ッテ $\mathfrak{x}(t)$ ガ $[a, b]$ デ一様ニ連續ナルコト、及ビ $\mathfrak{x}$ ノ屬スル空間 $\mathfrak{L}$ ガ完全ナ距離空間ナルトキニ Cauchy ノ收斂條件ガ成立スルコトニヨッテ證明サレル。(以後常ニ $\mathfrak{L}$ ハ完全ト假定スル!)

$\mathfrak{x}(t)$ ガ連續ナラバ容易ニ

$$\frac{d}{ds}\int_a^s \mathfrak{x}(t)\,dt = \mathfrak{x}(s)$$

之レカラ前ノ $\dfrac{d\mathfrak{x}}{dt} = 0$ ナラバ $\mathfrak{x}(t) =$ 一定トイフ定理ニヨリ、$\dfrac{d\mathfrak{x}}{dt}$ ガ連續ナラバ、普通ノ場合ト同様ニ，

$$\int_a^b \frac{d\mathfrak{x}(t)}{dt}\,dt = \mathfrak{x}(b) - \mathfrak{x}(a).$$

$\boxed{\text{重複積分}}$ 独立変数ガ有限個ノ実変数ノ組合ハセヨリ成ル函数 $f = f(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n)$ ノ場合，$f(u)$ ガ連続ナラバソノ重複積分モ、全ク初等積分学ニ於ケルトキト同様ニ定義出来ル。又重複積分ヲ単一積分ノ繰返シトシテ考ヘルコト，従ッテ又積分ノ順序ノ変更モ普通ノ場合ト全ク同様ニ出来ル.

例ヘバ

$$\int_a^b\int_{a'}^{b'} f(u, v)\,du\,dv = \int_a^b\left[\int_{a'}^{b'} f(u,v)\,dv\right]du$$

$$= \int_{a'}^{b'}\left[\int_a^b f(u, v)\,du\right]dv.$$

$\boxed{\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right) = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right) \text{ ニツイテ}}$ $f(u, v)$ ガ実変数 (u, v) デ微分可能ナルトキ、更ニ $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ ガ v デ連続微分可能ナラバ，

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

証明ハ

$$\int_a^U\int_b^V \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)du\,dv = \int_a^U\left[\int_b^V \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)dv\right]du$$

$$= f(U, V) - f(U, b) - f(a, V) + f(a, b)$$

$$= \int_b^V\left[\int_a^U \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)du\right]dv.$$

故ニ

$$\frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{\partial z(U,V)}{\partial V}\right)=\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\right]_{\substack{u=U\\ v=V.}}$$

（証明了）

一般ニ $\dfrac{\partial}{\partial u_k}\left(\dfrac{\partial}{\partial u_{k-1}}\left(\cdots\cdots\left(\dfrac{\partial z}{\partial u_1}\right)\cdots\cdots\right)\right)$ ガ連続ナル時ニハ

之レハソノ微分ノ順序ニ無関係トナル。 従ッテ我々ハ之ヲ

簡単ニ

$$\frac{\partial^k z}{\partial u_1 \partial u_2 \cdots\cdots \partial u_k}$$

デ表ハス。

§3. 高階ノ微分法

前号 §1 ニ於テ定義シタ $y=f(z)$ ノ z_0 ニ於ケル微分商ハ，z ノ線状空間 $\mathcal{L}_1$ カラ y ノ線状空間 $\mathcal{L}_2$ ヘノ線状写像デアル。即チ

$$f_z(z_0)=\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z_0}\in\left[\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1)\right].$$

此処デ z_0 ハぱらめたーニスギナイ。此ノぱらめたー z_0 ヲ活カシテ z ト同ジ領域ヲ変化セシムルトキ、之レヲ元ト同ジ z デ表ハシ、$f_z(z)=\dfrac{dy}{dz}$ ヲバ $y=f(z)$ ノ導函数トイフ。導函数ハ又 z ノ函数トナル。導函数ノトル値ノ領域ハ $\left[\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1)\right]$ デアル。

$[\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)]$ハ又線狀空間ヲ作ル。（60号 39—40頁參照）從ッテ $f_y(y)$ ガ更ニ y ノ函數トシテノ微分商ガ定義出來ル。即チ

$$f_{yy}(y)=\frac{d}{dy}f_y(y) \in \left[[\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)](\mathfrak{L}_1)\right].$$

y ハぱらめたーニスギナイ。<u>各一定ノ y ニツイテ</u>

$f_{yy}(y)$ ハ $(\mathfrak{L}_1)$ カラ $[\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)]$ ヘノ線狀寫像デアル。

以下同樣ニシテ一般ノ高階ノ微分商ヲ定義スルコトガ出來ル。

$\boxed{\text{高階ノ微分}}$ 一般ニ微分商ハ元ノ函數値ノ領域ヨリモ高イ階段ノ線狀空間ニ屬スル。之ニ對シ<u>微分ハ元ノ函數値ト同ジ線狀空間ニ屬ス</u>ルモノデアル。即チ

$$(y_1 \in \mathfrak{L}_1) \longrightarrow [dy=f_y(y)\,y_1 \in \mathfrak{L}_2]$$

同樣ニ二階ノ微分商ニ於テモ

$$(y_1 \in \mathfrak{L}_1) \longrightarrow \left\{f_{yy}(y)\cdot y_1 \ \in [\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)]\right\},$$

故ニ更ニ

$$(y_2 \in \mathfrak{L}_1) \longrightarrow \left\{ [f_{yy}(y)\cdot y_1]\cdot y_2 \in \mathfrak{L}_2\right\}.$$

次ノコトハ微分ノ定義カラ容易ニ證明出來ル。

$$\frac{d}{dy}\left\{f_y(y)\cdot y_1\right\}=f_{yy}(y)\cdot y_1,$$

故ニ

$$\frac{d}{dy}\left\{f_y(y)\cdot y_1\right\}\cdot y_2=\left[f_{yy}(y)\cdot y_1\right]\cdot y_2.$$

但シ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ ハ $\mathfrak{z}$ ト八独立ナ $\mathfrak{L}_1$ ノ要素（任意）デアル。

$$\boxed{\left[f_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}(\mathfrak{z})\cdot\mathfrak{z}_1\right]\cdot\mathfrak{z}_2=\left[f_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}(\mathfrak{z})\cdot\mathfrak{z}_2\right]\cdot\mathfrak{z}_1 \text{ ニ就テ}}$$

普通ノ微分法ニ於ケル法則

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ニ相當スルモノガ

$$\left[f_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}(\mathfrak{z})\cdot\mathfrak{z}_1\right]\cdot\mathfrak{z}_2=\left[f_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}(\mathfrak{z})\cdot\mathfrak{z}_2\right]\cdot\mathfrak{z}_1$$

デアル（$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ ニツイテ對稱）。但シ $f_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}(\mathfrak{z})$ ガ $\mathfrak{z}$ ニツイテ連續デアルト假定スル。之ハ有限次元ノ場合ニ於イテハ、行列

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial y}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial y}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n}\dfrac{\partial y}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n}\dfrac{\partial y}{\partial x_n} \end{pmatrix} = f_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}) \quad [y=f(\mathfrak{z})]$$

ガ對稱ナルコトヲ意味スルモノデアル。

證明.　$y=f(\mathfrak{z})$ ニ於テ

$$\mathfrak{z}(u,v)=\mathfrak{z}_0+u\mathfrak{z}_1+v\mathfrak{z}_2$$

(u,v) ハ實變數トスル。シカラバ

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=\frac{d}{d\mathfrak{z}}\left[f_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z})\cdot\mathfrak{z}_1\right]\mathfrak{z}_2=\left[f_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}(\mathfrak{z})\cdot\mathfrak{z}_1\right]\cdot\mathfrak{z}_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\left[f_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}(\mathfrak{z})\cdot\mathfrak{z}_2\right]\mathfrak{z}_1.$$

所ガ §2 ノ結果ニヨリ

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

故ニ $\left[f_{xx}(x)\cdot x_1\right]\cdot x_2=\left[f_{xx}(x)\cdot x_2\right]x_1$

——（証明了）——

次ニ $f(x, y)$ ガ (x, y) ニツキ微分可能デ $f_{xy}(x, y)$ ガ連続ナル時ニモ、同様ニシテ

$$\left[f_{xy}(x, y)\,dx\right]dy=\left[f_{yx}(x, y)\,dy\right]dx$$

ガ証明出来ル。又一般ノ高階ノ微分ニツイテモ同様ノコトガ成立スル。

ウカウカシテヰル内ニ又紙上談話會ノ原稿ノ締切リニナツテシマツタ、平凡ナ事バカリデ面白ナイ。此ノ次ハ解析函數ヲ考察スルコトニショウ。