223. 或種ノ積分方程式ニツイテ(I)

泉　信一(東北大)

北川　敏男(阪大)

§1. 緒論

1. §2ニ於イテハ積分方程式

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt \quad\text{-----------}(1)$$

ヲ解ク問題ニツイテ論ズル。前ニ泉氏[1]ハ

$$f(x)=O\left(e^{A|x|}\right) \quad\text{-----------}(2)$$

ナル條件ヲ附加シタトキ (1) ハ *Hopf–Wiener*[2] ノ理論ヲ用ヒテ解ケルコトヲ示シタ。コヽニハ更ニ (1) ハ *Ritt–Valiron*[3] ノ無限次微分方程式ノ理論ヲ用ヒテ解ケルコトヲ證明スル。

又 (2) ノ代リニ、$f(x)$ ＝正則ナルコトヲ假定シテモ (1) ヲ解クコトガ出來ル。

2. 次ニ (1) ヲ二ツノ方向ニ一般化スル、ソノ一ツハ

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{K}(x-t)f(t)\,dt^{4)} \quad\text{--------}(3)$$

之レヲ §3 ニ於イテ論ズル。特ニ

$$\begin{aligned}\mathbb{K}(x)&=\frac{1}{2} \qquad |x|\leqq 1\\ &=0 \qquad |x|>1\end{aligned}$$

---

1) 泉信一，學士院記事 XI (1935)

2) cf. Paley–Wiener, Fourier Transforms in the complex domain, 1934

3) J. F. Ritt, Trans. A. M. S. 18 (1917) 及ビ Valiron, Ann. l' École norm. sup. 46 (1929)

泉信一：數物會誌、第四卷，第二及ビ三号参照。

4) Bochner, Sitzbrte. Preus. Akad. 1930.

トスルトキ (3) ハ (1) ニナル。コヽニハ (3) ヲ $f(x)$ ガ解析的ナル條件ノ下ニ解ク。コヽニ於ケル方法ハ全ク同様ニシテ

$$f(x)=\int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt$$

ヲ解クコトガ出來ル。

3. 次ニ (1) ノモウレーツノ一般化ハ

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b f^{(k)}(x+t)\,d\varphi_k(t) \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

コヽニ (a, b) ハ有限區間デ $\varphi_k(t)$ ハ與ヘラレタ有界変分ノ函數デ、$f(x)$ ハ求ムル函數デアル。(4) ニ於イテ特ニ

$n=1,\ a=-1,\ b=1$

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &= \frac{1}{2} && t<-1 \text{ ニテ}\\ &= 0 && |t|\leqq 1 \text{ ニテ}\\ &= \frac{1}{2} && t>1 \text{ ニテ}\end{aligned}$$

トオケバ、コレハ，積分方程式 (1) ト同値ナ問題トナル。更ニ，$\varphi_k(t)$ ヲ有限個ノ jump ヲモツ step-function トスルトキ

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{K=0}^{s} a_{i,k}f^{(k)}(x+t_i)$$

コレ difference-differential equation デアル。

之レハ Bochner[5] ニヨツテ $f(x)$ 及ビ n 次マデノ

derivative ガスベテ $(-\infty, \infty)$ デ可積分ナル場合ガ取扱ハレテヰル、コヽニハ(2)ノ假定ト似タ

$$f^{(n-1)}(x) = O(e^{A|x|}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

ノ下ニ論ズル。

更ニ(4)ヲ次ノ形ニ一般化スル。

$$f^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) \int_{a-0}^{b+0} f^{(k)}(x+t)\, d\varphi_k(t) = g(x)$$

コヽニ

$p_k(x)$ ハ多項式デアル、之レヲ解クタメニ *Hilb-Perron*[6] ノ理論ヲ用ヰル。

§2. 積分方程式 $f(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$ ニツイテ

1. 定理1. $f(x)$ ガ

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ヲ満足シ且ツ

$$f(x) = O(e^{A|x|}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

ヲ満足スルトスル、コヽニAハ任意ノ正数デアル。

$$1 = \frac{1}{2u}(e^{u} - e^{-u}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2,1)$$

---

5) *Bochner, Fouriersche Integral*, 1932

6) *Hilb: Math. Annalen*, 82, 84 (1920, 1921)

Perron: Math. Annalen, 84 (1921)

ノ根ノ中デ零デナク且ツ實數部ノ絶對値ガAヨリ小サイモノヲ $u_{\pm 1}, \cdots\cdots, u_{\pm p}$ トスル、然ルトキ

$$f(x)=A'x+B+\sum_{\substack{k=-p\\ u\neq 0}}^{p} A_k e^{-u_k x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

コヽニ A', B 及ビ A_k ハ任意ノ定數デアル。

コノ定理ハ前ニ Hopf-Wiener ノ積分方程式ノ理論ヲ用ヒテ之ヲ證明シタ、コヽニハ Ritt-Valiron ノ無限次ノ微分方程式ノ理論カラ導イテ見ヨウ。

2. $\int_0^x f(t)\,dt = F(x)$

トオクトキ，(1)ハ

$$F'(x)=\frac{1}{2}\left\{F(x+1)-F(x-1)\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

然ルニ (1) ヲ滿足スル $f(x)$ ハ何回デモ微分出來ル、故ニ (4) ヲ n 回微分シテ

$$F^{(n+1)}(x)=\frac{1}{2}\left\{F^{(n)}(x+1)-F^{(n)}(x-1)\right\} \cdots\cdots\cdots(5)$$

然ルニ (2) 及ビ (4) カラ

$$\left|F'(x)\right| \leqq \frac{1}{2}\left\{\left|F(x+1)\right|+\left|F(x-1)\right|\right\} \leqq \frac{1}{2} e^{A|x|}\left(e^{A}+e^{+A}\right)$$
$$\leqq e^{A(|x|+1)}$$

故ニ (5) カラ同様ニシテ

$$\left|F^{(n)}(x)\right| \leqq e^{A(|x|+n)}$$

故ニ $F(x)$ ハ analytic デアル、從ツテ

$$F(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(x)}{n!},\quad F(x-1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{F^{(n)}(x)}{n!} \cdots\cdots(6)$$

故ニ (4) カラ

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F^{(2n-1)}(x)}{(2n-1)!}$$

乃チ

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(2n)}(x)}{(2n-1)!}\text{ -------------------- }(7)$$

但シ $(-1)!=1$ トスル。之レ乃チ無限次ノ微分方程式デアル。コゝニValironノ定理ヲ應用スル。

(7) ノ母函数 (*generating function*) ノ order 1デ, *mean type* デアル。故ニ $f(x)$ ハ (3) ナル形デ表ハサレル。

故ニ定理1ガ証明出來タ。

3. 定理1ニ於ケル條件 (2) ノ代リニ, $F(x)$ ガ解析的デアルトスル。然ルトキ (6) ガ成立スル、故ニ (7) ガ得ラレル。

之レニValironノ定理ヲ應用スル。

(2,1) ノ根ヲ $u_0=0$, $u_{\pm 1}$, $u_{\pm 2}$, ------- トスル. 然ルトキ u_0 ガ只一ツノ重根デ、他ハスベテ單根デアル。從ツテValironノ定理カラ次ノ定理ガ得ラレル。

定理2. $f(x)$ ガ (1) ノ解析的解ナラバ,

$$f(x)=Ax+B+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{-u_k x}+B_k e^{-u_{-k} x}\right)$$

コゝニ $u_{\pm 1}$, $u_{\pm 2}$, ------- ハ (2,1) ノ零デナイ根トスル。