221. 微分法ニ就テ I

南雲道夫（阪大）

微分法ヲ一般化或ハ抽象化スルコトハ已ニ種々ナ方向ニ於テ多ク試ミラレタ。平素文献ニ暗イ自分ハ，ソレ等ノコトニツイテ殆ンド全ク何モ知ラナイ故，之レニツイテ語ルコトハ出来ナイ。此処デハ只古典的ナ微分法ヲ少シク抽象的ナ見地カラ復習ヲシテ見タイト思フ。考ヘハ古典的ナモノト並行ナモノニスギナイカラ，本質的ニハ別ニ新シイモノデハナイ。

要スルニ線状空間ニ於ケル函数ニツイテ，ソノ微分，高階微分，解析函数及ビ微分方程式ヲ考察スルノが目的デアル。微分ノ概念ハ高次ノ無限小ヲ無視スルトキ，函数ノ変化が線状函数ト考ヘラレルト云フコトニ基礎ヲ置クモノデアル。

§1. 微分商及ビ微分

先ヅ<u>線状空間</u>トハ次ノ性質ヲ有スルモノヲ云フ。

(i) $\mathfrak{L}$ ニ屬スル任意ノ有限個ノ要素 $\mathfrak{a}_1, \cdots\cdots \mathfrak{a}_n$ ニツイテ其ノ一次的結合

$$c_1\mathfrak{a}_1 + \cdots\cdots + c_n\mathfrak{a}_n$$

ガ定義サレル。$c_1, \cdots\cdots, c_n$ ハ任意ノ實數デアル。即チ $\mathfrak{L}$ ハ普通ノ Vektor ノ空間ト同様ノモノデアル。

(ii) $\mathfrak{L}$ ノ要素 $\mathfrak{a}$ ニハソノ絶對値 $|\mathfrak{a}|$ ナル實數ガ定義サレル。$|\mathfrak{a}|$ ハ次ノ性質ヲ有スル。

$|\mathfrak{a}| \geqq 0$　丁度 $\mathfrak{a} = 0$ ノ時ニ　$|\mathfrak{a}| = 0$

$|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| \leqq |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}|$

$|c\,\mathfrak{a}| = |c|\,|\mathfrak{a}|$　　　c ハ實數

次ニ $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|$ ヲ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 間ノ距離ト云フ。之レニヨツテ極限ガ普通ノ通リニ定義サレル。$\mathfrak{L}$ ガ完全ナ距離空間ヲナストキ之ヲ完全ナ線狀空間ト呼ブ。(完全トハ Cauchy ノ收斂條件ガ成立スルコトヲ云フ)

二ツノ線狀空間 $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ ガアツテ $\mathfrak{x} \in \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{y} \in \mathfrak{L}_2$ トスルトキ線狀函数トハ次ノ性質ヲ有スル函数 $\mathfrak{y} = f(\mathfrak{x})$ ヲ云フ。

(i) $f(c_1\mathfrak{x}_1 + \cdots\cdots + c_n\mathfrak{x}_n) = c_1 f(\mathfrak{x}_1) + \cdots\cdots$
$\cdots\cdots + c_n f(\mathfrak{x}_n).$

(ii) $|f(\mathfrak{x})| \leqq M\,|\mathfrak{x}|$ ナル一定ノ正数 M ガ存在ス。

線狀函数ニヨル $\mathfrak{R}$ ヨリ $\mathfrak{R}'$ ヘノ寫像ヲ普通大キナローマ字デ表ハス．例ヘバ

$$\mathfrak{y} = f(\mathfrak{x}) = T\mathfrak{x}$$

ノ如シ。$\mathfrak{L}_1$ カラ $\mathfrak{L}_2$ ヘノ線状寫像ノ集合ハ

$$(c_1 T_1 + \cdots + c_n T_n) x = c_1 T_1 x + \cdots + c_n T_n x$$

及ビ

$$|T| = \frac{|T x|}{|x|} \text{ ノ上限}$$

ナル定義ニヨツテ又一ツノ線状空間ヲ作ル。之ヲ $[\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)]$ デ示ス。

微分ノ定義函數

$$y = f(x) \quad (x \in \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{L}_1,\ y \in \mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{L}_2)$$

ニ於テ　$x = x_0 + \Delta x$，$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ト スルトキ

$$\Delta y = T(x_0) \Delta x + \varepsilon(x_0, \Delta x)$$

$$|\varepsilon(x_0, \Delta x)| = o(|\Delta x|),$$

但シ $T(x_0) \Delta x$ ハ Δx ノ線状函数ナラバ $T(x_0)$ ヲバ x_0 ニ於ケル $y = f(x)$ ノ x ニ關スル微分商トイフ。之レヲ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0}$ 又ハ $f_x(x_0)$ デ示ス．微分商ハ $\mathfrak{L}_1$ カラ $\mathfrak{L}_2$ ヘノ線状寫像デアル．

即チ $\dfrac{dy}{dx} = f_x(x) \in [\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)]$

微分商ハ一義的ニ決定スル、証明ハ

$$\Delta y = T_1(x_0) \Delta x + \varepsilon_1(x_0, \Delta x)$$

$$= T_2(x_0) \Delta x + \varepsilon_2(x_0, \Delta x)$$

$$|\varepsilon_i(x_0, \Delta x)| = o(|\Delta x|)$$

カラ $\{T_1(\mathfrak{x}_0)-T_2(\mathfrak{x}_0)\}\Delta\mathfrak{x}=\varepsilon_3(\mathfrak{x}_0,\Delta\mathfrak{x})$

$$|\varepsilon_3(\quad)|=o(|\Delta\mathfrak{x}|)$$

$\Delta\mathfrak{x}=c\,\mathfrak{x}_1$ トオケバ

$$\{T_1-T_2\}\mathfrak{x}_1=\frac{o(|c|)}{|c|}$$

故ニ $c\longrightarrow 0$ ノ極限ニ於テ（左辺ハcヲ含マヌ故）

$$\{T_1-T_2\}\mathfrak{x}_1=0. \quad 即チ\ T_1=T_2.\ （証明了）$$

特ニ $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ が有元次元ノ空間デ $\mathfrak{x}=(x_1,\cdots\cdots,x_k)$, $\mathfrak{y}=(y_1,\cdots\cdots,y_l)$ トスレバ，微分商ハ行列 (*Matrix*)

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial y_l}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_l}{\partial x_k}\end{pmatrix}$$

デ表ハサレル。一般ノ線形空間ノ場合ニハ、微分商ヲ一定ノ分リ易イ形式ニ表ハスコトハ困難デアル。

次ニ微分商ニ對シテ $\mathfrak{y}=f(\mathfrak{x})$ ノ<u>微分ヲバ</u>

$$d\mathfrak{y}=f_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x})\,\mathfrak{x}' \quad (\mathfrak{x}'\in\mathfrak{L}_1,\ 従ッテ\ d\mathfrak{y}\in\mathfrak{L}_2)$$

デ定義スル。$\mathfrak{x}'$ ハ <u>$\mathfrak{x}$ トハ独立ナ</u> $\mathfrak{L}_1$ ノ任意ノ要素デアル.（$\mathfrak{x}'$ ハ $\Delta\mathfrak{x}$ トハ別物デアル！）今 $\mathfrak{x}$ ヲ $\mathfrak{x}$ 自身ノ函数ト考ヘレバ明ラカニ

$$d\mathfrak{x}=\mathfrak{x}'\in\mathfrak{L}_1$$

故ニ

$$d\mathfrak{y}=f_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x}=\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\,d\mathfrak{x}.$$

微分商 $\dfrac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}$ ハ $\mathfrak{L}_1$ カラ $\mathfrak{L}_2$ ヘノ線状寫像デアルガ，微分 $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$ ハ夫々 $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ ニ於ケル変数デアル。

多元函數ノ微分　k個ノ線空間 $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \cdots\cdots \mathfrak{L}_k$ ガアリ、ソノ各要素ヲ $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{x}_k$ トスルトキ，$(\mathfrak{x}_i \in \mathfrak{L}_i)$ ソノ組合セ $(\mathfrak{x}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{x}_k)=\mathfrak{x}$ ヲ点トスル空間ヲバ $\mathfrak{L}_1\times\mathfrak{L}_2\times\cdots\cdots\times\mathfrak{L}_k$ デ示ス。

$\mathfrak{L}_1\times\mathfrak{L}_2\times\cdots\cdots\times\mathfrak{L}_k$ ニ於ケル一次結合ハ

$$\mathfrak{x}^{(\nu)}=(\mathfrak{x}_1^{(\nu)}, \cdots\cdots, \mathfrak{x}_k^{(\nu)})$$

トスルトキ

$$\sum_{\nu}^{n} c_\nu \mathfrak{x}^{(\nu)}=\left(\sum_{\nu}^{n} c_\nu \mathfrak{x}_1^{(\nu)}, \cdots\cdots, \sum_{\nu}^{n} c_\nu \mathfrak{x}_k^{(\nu)}\right)$$

ト定メル、又

$$|\mathfrak{x}|=\sqrt{|\mathfrak{x}_1|^2+\cdots\cdots+|\mathfrak{x}_k|^2}$$

或ハ　$|\mathfrak{x}|=|\mathfrak{x}_1|+\cdots\cdots+|\mathfrak{x}_k|$

等ニヨッテ絶對値ヲ定義スレバ $\mathfrak{L}_1\times\cdots\cdots\times\mathfrak{L}_k$ ハ線状空間トナル。（$|\mathfrak{x}|$ ノ定義ノ仕方ハ尚種々アルガ、絶對値ノ基本的性質及ビ $|(0, \cdots\cdots, 0, \mathfrak{x}_i, 0, \cdots\cdots, 0)|=|\mathfrak{x}_i|$ ガ成立スルヤウニ定義スレバヨイ。要スルニイヅレデモ *topologisch* ニ同等ナコトガ主要デアル）

$\mathfrak{y}=f(\mathfrak{x}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{x}_k)$ ガ $(\mathfrak{x}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{x}_k)=\mathfrak{x}$ ニツイテ微分可能トスレバ微分ノ定義カラ容易ニ

$$dy=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k$$

ヲ得ル。$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ハ f ノ x_i ノミニツイテノ（他ノ x_j ハ一定トシテ）微分商デアル。

$\boxed{\text{微分商ノ基本的性質}}$ 先ヅ

$y=f(x)$ ガ x_0 デ微分可能ナラバ，$f(x)$ ハ x_0 デ連続デアル（証明容易）。

次ニ $y=c_1 y_1+\cdots\cdots+c_n y_n$ （$y_\nu\in\mathfrak{L}_2$）

$y_\nu=f_\nu(x)$ ガ x_0 デ微分可能ナラバ，x_0 ニ於テ

$$\frac{dy}{dx}=c_1\frac{dy_1}{dx}+\cdots\cdots+c_n\frac{dy_n}{dx}$$

（証明容易）

又 $y=f(x)$ ガ x_0 デ微分可能デ $y_0=f(x_0)$，且ツ $z=g(y)$ ガ y_0 デ微分可能ナラバ（$x\in\mathfrak{L}_1$, $y\in\mathfrak{L}_2$, $z\in\mathfrak{L}_3$）x_0 ニ於テ

$$\underline{\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\;\frac{dy}{dx}=g_y(y_0)f_x(x_0)}$$

証明ハ $\Delta z=g_y(y_0)\Delta y+\varepsilon'(y_0,\Delta y)$

$$|\varepsilon'(\quad)|=o(|\Delta y|)$$

ニ於テ $\Delta y=f_x(x_0)\Delta x+\varepsilon(x_0,\Delta x)$

$$|\varepsilon(\quad)|=o(|\Delta x|)$$

ヲ代入スレバヨイ（線状函数ノ定義参照）

同様ニ多元函数 $\mathfrak{z}=f(\mathfrak{y}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{y}_k)$ ガ $(\mathfrak{y}_1^0, \cdots\cdots, \mathfrak{y}_k^0)$ デ微分可能デ，$\mathfrak{y}_i^0=\varphi_i(\mathfrak{x}_0)$，$\mathfrak{y}_i=\varphi_i(\mathfrak{x})$ ガ $\mathfrak{x}_0$ デ微分可能ナラバ $\mathfrak{x}_0$ ニ於テ

$$\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}=\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial\mathfrak{y}_1}\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}}+\cdots\cdots+\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial\mathfrak{y}_k}\frac{d\mathfrak{y}_k}{d\mathfrak{x}}$$

次ニ最モ特別ナ場合トシテ，$\mathfrak{z}$ ガ $\mathfrak{y}$ ノ線状函数

$$\mathfrak{z}=T\mathfrak{y}$$

ナルトキニハ直チニ

$$\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}=\frac{d}{d\mathfrak{x}}(T\mathfrak{y})=T\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}.$$

ヲ得ル。

$\mathfrak{D}$ デ $\dfrac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}=0$ ナラバ $\mathfrak{D}$ デ $\mathfrak{y}=$ 一定デアル．

（$\mathfrak{D}$ ハ連結領域）

証明．$\mathfrak{D}$ 内ノ二点 $\mathfrak{x}_1$ 及ビ $\mathfrak{x}_2$ ヲバ屈折線デ結ビ，ソノ各線分ノ継ギ目ニ於ケル $\mathfrak{y}$ ガ等シイコトヲ言ヘバヨイ。従ッテ $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ ヲ結ブ線分 $\mathfrak{x}(t)=(1-t)\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2 \quad 0\leqq t\leqq 1$ ガ $\mathfrak{D}$ ニ属スル場合ノミヲ考ヘル。

$$u=l(\mathfrak{y}) \qquad u \text{ 實数}$$

ヲ任意ノ線状函数トスルトキ

$$\frac{du}{dt}=\frac{d}{dt}l(\mathfrak{y}(t))=l\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}=0$$

故ニ

$$u(y_1)=u(y_2)$$

u ハ y ニツキ任意ノ線狀函數デアルカラ

$$y_1=y_2 \qquad \text{(証明了)}$$

〔注意〕 上ノ証明デハ次ノコトヲ用ヒタ。

線狀空間 $\mathcal{L}$ ノ二点 α_1, α_2 ガアルトキ, $\mathcal{L}$ ニ於ケル任意ノ実数値ヲ取ル線狀函數ヲ $u(\xi)$ トスレバ常ニ

$$u(\alpha_1)=u(\alpha_2)$$

ナラバ,

$$\alpha_1=\alpha_2$$

デアル。 此ノコトハ具体的ニ與ヘラレタ線狀空間ニ於テハ容易ニ証明出來ル。 只抽象的ナ線狀空間デハ自明トハ言ハレナイ。之レハ α_1, α_2 ヲ含ム二次元ノ線狀空間 $\mathcal{L}_2(\mathcal{L})$ ニ於テ定義サレタ線狀函數 $u(\xi)$ ガ $\mathcal{L}$ 全体ノ線狀函數(連続ナ)ニ拡張出來ルコトガ分ッテ井レバ容易ニ証明出來ル。此ノ後ノ定理ノ証明ニハ抽象論ニ特有ナ Wohlordnungssatz ヲ用ヒル(功力氏抽象空間論第四章192頁参照). カヽル証明法ヲ好マナイ人ハ, カヽル定理ヲバ線狀空間 $\mathcal{L}$ ニ関スル一ツノ條件トシテ付ケ加ヘレバヨイ。

未ダ本論ノ入口ノ所デアルガ, 紙上談話會ノ締切リノ日トナッタカラ, 以下次号ニ讓ルコトニスル。何ダカクダラヌ事バカリ長タラシク書イテ面白ナイ次第デアル。 (ツヾク)