218. $G(\lambda)=\int_{a-0}^{b+0} e^{\lambda t}\, d\varphi(t)$ ニ就イテ

北川 敏男（阪大）

1. 南雲氏ノ問題ニ就イテ（I）デ

$$G(\lambda)=\int_{a}^{b} e^{\lambda t}\, d\varphi(t)$$

ノ behaviour ヲ調ベタ。シカシ Fourier 級數論ヲ包含サセルタメニハ，寧ロ

$$G(\lambda)=\int_{a-0}^{b+0} e^{\lambda t}\, d\varphi(t)$$

ノ形デ考ヘタ方ガヨイ。最近 Math. Zeitschr. Band 40, Heft 3 デ R. C. Young ガコノ函數ノ asymptotic behaviour ヲ研究シテヰル。吾々ノ場合ニ援用出來ルトヨイノデアルガ、ソレ程精細ニナッテヰナイヤウニ思ハレル。

ヤハリ氣長ニ進ム外ハナイ。

尚，$\varphi(t)$ ノ條件ヲ緩メウルト云ッタガ次ノ如キ場合ヲ意味

シテヰル。

I. $\varphi(t)$ ガ点 a 及ビ b デ不連続ナルトキ:

コノトキ

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \varphi(t) && (a < t < b \text{ デハ}) \\
&= \varphi(b-0) && (\quad t \geqq b \text{ デハ}) \\
&= \varphi(a+0) && (\quad t \leqq a \text{ デハ})
\end{aligned}
$$

トオケバ

$$
\int_{a-0}^{b+0} e^{\lambda t} d\varphi(t) = \{\varphi(a+0) - \varphi(a-0)\} e^{\lambda a}
$$

$$
+ \{\varphi(b+0) - \varphi(b-0)\} e^{\lambda b} + \int_a^b e^{\lambda t} d\varphi_1(t)
$$

茲ニ, $\varphi_1(t)$ ハ $[a, b]$ デ有界変分ノ函数デアリ、特ニ点 a, b デ連続ニナツテヰルカラ

$$
\begin{aligned}
\int_a^b e^{\lambda t} d\varphi_1(t) &= o(e^{\lambda a}) \qquad R\lambda \leqq 0 \text{ ニテ} \\
&= o(e^{\lambda b}) \qquad R\lambda \geqq 0 \text{ ニテ}
\end{aligned}
$$

従ツテ

$$
\int_{a-0}^{b+0} e^{\lambda t} d\varphi(t) = [D(a)] e^{\lambda a} + [D(b)] e^{\lambda b}
$$

ト置キウル。(但シ $D(a) = \varphi(a+0) - \varphi(a-0)$ 等トス)

II. $\varphi(t)$ ガ点 a 及ビ b デ連続ナルトキ:

コノ場合ニハ, a, b ガ不連続点ノ集積点ニナツテヰルカモ知レヌ。ソノトキニハ一寸手ガ出ナイガ、<u>今二ツノ區間</u>,

$[a, t_1)$ 及ビ $(t_n, b]$ ノ各点ハ連続点デアリ. t_1, t_n が不連続点ニナッテヰルトスル。

茲デ

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \varphi(t) && t < t_1 \text{ ニテ} \\
&= \varphi(t_1 - 0) && t \geqq t_1 \text{ ニテ} \\
\varphi_2(t) &= \varphi(t_1 + 0) && t \leqq t_1 \text{ ニテ} \\
&= \varphi(t) && t_1 < t < t_n \text{ ニテ} \\
&= \varphi(t_n - 0) && t \geqq t_n \text{ ニテ} \\
\varphi_3(t) &= \varphi(t_n + 0) && t \leqq t_n \text{ ニテ} \\
&= \varphi(t) && t > t_n \text{ ニテ}
\end{aligned}
$$

ト定義シテ

$$
\begin{aligned}
\int_{a-0}^{b+0} e^{\lambda t} d\varphi(t) &= \int_{a-0}^{t_1-0} e^{\lambda t} d\varphi_1(t) + D(t_1) e^{\lambda t_1} + \int_{t_1+0}^{t_n-0} e^{\lambda t} d\varphi_2(t) \\
&\quad + D(t_n) e^{\lambda t_n} + \int_{t_n-0}^{b+0} e^{\lambda t} d\varphi_3(t) \\
&= \int_a^{t_1} e^{\lambda t} d\varphi_1(t) + [D(t_1)] e^{\lambda t_1} + [D(t_n)] e^{\lambda t_n} \\
&\quad + \int_{t_n}^{b} e^{\lambda t} d\varphi_3(t)
\end{aligned}
$$

茲デ残リニツノ積分ノ処置, 即チ *asymptotically* ニ *exponential sum* ニ直スコトが問題デアル、ソノ際無假定デ進ミタイ。ダが今ノ所一寸手が出ナイ。Titchmarsh ノ作ッタ *example* デモ, $G(\lambda)$ が実軸上デ

無限ニ Oscillate スルヤウナノガアリウル。(吾々が、サキニ論ジタトキトハ本質的ニ違ッタ behaviour デアル。) ソコデ若干ノ假定ヲ以ッテ今ノ所満足シテ他日ヲ俟タウ。即チ

<u>區間 (a, t_1) デ $\varphi_1'(t)$ が存在シ，点 a, t_1 ニテハ夫々 $D_+\varphi_1(a)$, $D_-\varphi_1(t_1)$ ヲ以ッテ $\varphi_1'(t)$ ヲ定義スルトナ，區間 $[a, t_1]$ デ，$\varphi_1'(t)$ が有界変分ノ函数デアリ且ッ点 a, t_1 デハ連続デアルトスル</u>。

スルト

$$\int_a^{t_1} e^{\lambda t} d\varphi_1(t) = \int_a^{t_1} e^{\lambda t}\varphi_1'(t)\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\varphi_1'(t)\right]_a^{t_1} - \frac{1}{\lambda}\int_a^{t_1} e^{\lambda t} d\varphi_1'(t)$$

$$= \frac{\left[\varphi_1'(t_1)\right]e^{\lambda t_1} - \left[\varphi_1'(a)\right]e^{\lambda a}}{\lambda}$$

但シ $\varphi_1'(t_1)$, $\varphi_1'(a) \neq 0$ ト假定シテオク。

$\varphi_3(t)$ ニツイテモ同様デアル。

III. $\varphi(t)$ が点 a, b ノ一方デ連続，他方デ不連続ノトキニハ，I, II ヲ夫々ノ点ニ併用スル。