215. Aussagenkalkül ニ於ケル命題ノ定義ニ就テ(III)

伊藤　誠（御影師範）

次ニ此ノ二ツノ條件ガ又充分條件デアルコトヲ証明シタイ。題意ヲ再ビ繰返セバ，

"今 p 及ビ $C^{(\lambda)}$ ノ m 個カラナル順序集合 P_m ヲ考ヘル。P_m 中ノ p ノ数ヲ $\pi(P_m)$，$C^{(\lambda)}$ ノ数ヲ $c^{(\lambda)}(P_m)$ トシ，P_m ノ任意ノ echte Anfangsschnitt $P_m(\mu)$ 中ノ p ノ数ヲ $\pi(P_m(\mu))$ トスル。コノトキ若シモ次ノ二條件

$$(\mathrm{I})\quad \pi(P_m)=\sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_m)\cdot(\lambda-1)+1$$

$$(\mathrm{II})\quad \pi(P_m)\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_m(\mu))\cdot(\lambda-1)\quad(\mu=1,2,\cdots\cdots,m-1)$$

ガ満足サレルナラバ，P_m ハ一ツノ Aussage デアル。"

〔証明〕 m ニ就イテ Induktion ヲ行フ。

α) $m=1$ ノトキ，此ノ時條件(I)ガ成立スルタメニハ，明ラカニ

$$C^{(\lambda)}(P_1)=0\quad(\lambda=1,2,\cdots\cdots,r),\quad \pi(P_1)=1$$

デナケレバナラナイ。従ッテ

$$P_1=p$$

トナリ，P_1 ハ 0 次ノ命題トナル。

β) $m=1,2,\cdots\cdots,m$ マデ上記ノコトガ成立シタト假定シヨウ。今 P_{m+1} ヲ考ヘルト，ソレハ次ノ何レカノ形ヲ

取ル。

(a) $P_{m+1}=pP_m$

(b) $P_{m+1}=C^{(\nu)}P_m$

然ル＝(a)ノ場合ハ條件(II)＝ヨツテ起リ得ナイ。何故ナラバ(II)＝ヨリ

$$\pi(P_{m+1}(\mu))\leqq\sum_{\lambda=1}^{r}c^{(\lambda)}(P_{m+1}(\mu))\cdot(\lambda-1)$$

$$(\mu=1,2,\cdots\cdots,m)$$

コノ式＝於イテ特＝ $\mu=1$ トスレバ

$$\pi(P_{m+1}(1))\leqq\sum_{\lambda=1}^{r}c^{(\lambda)}(P_{m+1}(1))\cdot(\lambda-1)$$

今ノ場合 $\pi(P_{m+1}(1))=1,\quad c^{(\lambda)}(P_{m+1}(2))=1,$

ソレ故上式ハ $1\leqq 0$ トナリ成立シナイコトトナルカラ。

依ツテ(b)ノ場合ダケヲ考ヘレバヨイ。

此ノ場合＝ハ P_m ガ ν 個ノ Aussagen ＝分解サレル。

以下先ヅ之ヲ証明シヤウ。

P_{m+1} ノ形カラ明ラカニ

$$\left.\begin{aligned}&\pi(P_{m+1})=\pi(P_m),\quad \pi(P_{m+1}(\mu+1))=\pi(P_m(\mu)),\\&c^{(\lambda)}(P_{m+1}(\mu+1))=c^{(\lambda)}(P_m(\mu))\qquad(\lambda\neq\nu),\\&C^{(\nu)}(P_{m+1}(\mu+1))=C^{(\nu)}(P_m(\mu))+1\end{aligned}\right\}(\mu=1,2,\cdots,m)$$

但シ $P_m(m)=P_m$ トスル。之等ヲ

條件(I)：

$$\pi(P_{m+1})=\sum_{\lambda=1}^{r}c^{(\lambda)}(P_{m+1})\cdot(\lambda-1)+1$$

＝代入シテ

$$\pi(P_m)=\sum_{\lambda=1,\,\lambda\neq\nu}^{r} c^{(\lambda)}(P_m)\cdot(\lambda-1)+\left(c^{(\nu)}(P_m)+1\right)\cdot(\nu-1)+1$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_m)\cdot(\lambda-1)+\nu \text{ .... }(1)$$

又條件 II：

$$\pi\left(P_{m+1}(\mu+1)\right)\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} C^{(\lambda)}\left(P_{m+1}(\mu+1)\right)\cdot(\lambda-1) \quad (\mu=1,2,\cdots\cdots,m-1)$$

ニ代入シテ

$$\pi\left(P_m(\mu)\right)\leqq\sum_{\lambda=1,\,\lambda\neq\nu}^{r} c^{(\lambda)}\left(P_m(\mu)\right)\cdot(\lambda-1)+\left(c^{(\nu)}(P_m(\mu))+1\right)\cdot(\nu-1)$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}\left(P_m(\mu)\right)\cdot(\lambda-1)+(\nu-1) \text{ .... }(2)$$

$$(\mu=1,2,\cdots\cdots,m-1)$$

今 (i) $\underline{\nu=1}$ ノトキハ (1), 及ビ (2) 式ハ夫々

$$\begin{cases}\pi(P_m)=\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_m)\cdot(\lambda-1)+1 \\ \pi\left(P_m(\mu)\right)\leqq\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{r} C^{(\lambda)}\left(P_m(\mu)\right)\cdot(\lambda-1) \quad (\mu=1,2,\cdots\cdots,m-1)\end{cases}$$

トナリ、從ッテ假定ニヨリ P_m ハ一ツノ Aussage A_n トナル。

(ii) $\nu=1,2,\cdots\cdots,\nu-1$ マデノ場合ニツイテハ，P_m ガ (1),(2) ノ條件ヲ滿足スレバ夫々 $1,2,\cdots\cdots,\nu-1$ 個ノ Aussagen ニ分解出來ルモノト假定スル。然ルトキハ $\nu=\nu$ ノ

場合ニモ然ルコトガ言ヘル。之ガタメニ新シク

$$\delta_m(\mu)=\pi(P_m(\mu))-\sum_{\lambda=1}^{r}c^{(\lambda)}(P_m(\mu))\cdot(\lambda-1) \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

ナル μ ノ函數ヲ考ヘルト，假定(1)，(2) ニヨッテ

$$\begin{cases} \delta_m(m)=\nu & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4) \\ \delta_m(\mu)\leqq \nu-1 & (\mu=1,2,\cdots\cdots,m-1) \end{cases}$$

(3) 式ノ右辺カラ分ル様ニ

$\delta_m(\mu+1)>\delta_m(\mu)$ ナルトキハ $\delta_m(\mu+1)=\delta_m(\mu)+1$

デナケレバナラナイ。従ッテ (4) ヨリ $\delta_m(m-1)=\nu-1$ ヲ得ル。

即チ $\delta_m(\mu)$ ナル函數ハ次ノ性質ヲ有スル。

$$\begin{cases} 1. & \delta_m(1)\leqq 1 \\ 2. & \delta_m(m-1)=\nu-1\geqq 1, \\ 3. & \delta_m(\mu)<\delta_m(\mu+1) \text{ ナラバ } \delta_m(\mu+1)=\delta_m(\mu)+1 \end{cases}$$

コレヨリ

$$\delta_m(\mu)=1$$

トナル如キ μ ガ存在スルコトガ知ラレル。斯様ナ μ ノ最小ナ値ヲ m_1 トスルト，

$$\begin{cases} \delta_m(m_1)=1 & (1\leqq m_1\leqq m-1) \\ \delta_m(\mu)\leqq 0 & (\mu=1,2,\cdots\cdots,m_1-1) \end{cases}$$

ガ成リ立ツ。

依ッテ初メノ假定 ($m=1,2,\cdots\cdots,m$ マデニ就イテハ條件(I)，(II) ガ P_m ノ Aussage トナルタメノ充分條件ナリ

ト云フ）ニヨリ P_m ノ Anfangsschnitt $P_m(m_1)$ ハ一ツノ命題 A_{i_1} トナル。

P_m ヨリ $P_m(m_1)$ ヲ取リ去ッタ残リヲ P_{m-m_1} デ表ハセバ P_{m-m_1} ニ就イテハ

$$\delta_{m-m_1}(m-m_1)=\pi(P_{m-m_1})-\sum_{\lambda=1}^{r}C^{(\lambda)}(P_{m-m_1})\cdot(\lambda-1)$$

$$=\left(\pi(P_m)-\pi(P_{m_1})\right)-\sum_{\lambda=1}^{r}\left(C^{(\lambda)}(P_m)-C^{(\lambda)}(P_{m_1})\right)\cdot(\lambda-1)$$

$$=\left(\pi(P_m)-\sum_{\lambda=1}^{r}C^{(\lambda)}(P_m)\cdot(\lambda-1)\right)-\left(\pi(P_{m_1})-\sum_{\lambda=1}^{r}C^{(\lambda)}(P_{m_1})\cdot(\lambda-1)\right)$$

$$=\delta_m(m)-\delta_m(m_1)$$

然ルニ $\delta_m(m)=\nu$, $\delta_m(m_1)=1$ ナル故

$$\delta_{m-m_1}(m-m_1)=\nu-1$$

同様ニ $\delta_{m-m_1}(\mu)\leqq\nu-2,\qquad(\mu<m-m_1)$

ナルコトガ言ヘル。

依ッテ先ノ假定（(1), (2) ガ成立テバ，P_m ハ ν 個ノ Aussagen ニ分解出来ルト云フ）ニヨリ P_{m-m_1} ハ $(\nu-1)$ 個ノ Aussagen $A_{i_2}A_{i_3}\cdots\cdots A_{i_\nu}$ ニ分解サレル。

從ッテ

$$P_m=P_{m_1}P_{m-m_1}=A_{i_1}\overbrace{A_{i_2}\cdots\cdots A_{i_\nu}}^{(\nu-1)}$$

トナリ、P_m ハ ν 個ノ Aussagen ニ分解出来ルコトトナル。

コレデ條件 (1), (2) ノ下ニ P_m ハ一般ニ ν 個ノ Aussagen ニ分解出来ルコトガ分ッタ。

従ツテ先ノ P_{m+1} ハ

$$P_{m+1}=C^{(\nu)}P_m$$
$$=C^{(\nu)}A_{i_1}A_{i_2}\cdots\cdots A_{i_\nu}=A_{n+1}$$

（但シ $n=i_1+\cdots\cdots+i_2$）

トナリ，P_{m+1} ニ就イテモ（Ⅰ），（Ⅱ）ガ充分條件デアルコトガ言ハレ，歸納法ニヨリ證明ガ完結サレタ。

上ノ證明中ニ述ベタ $\delta_m(\mu)$ ナル函數ノ性質

$$\begin{cases}\delta_m(m-1)=\nu-1\\ \delta_m(m)=\nu\end{cases}$$

ナルコトヨリ直チニ次ノ Korollar ガ得ラレル。

〔Korollar〕

"$p_i\,(i=1,2,\cdots\cdots,a_0)$ 及ビ $C_l^{(\lambda)}$

$(\lambda=1,2,\cdots\cdots,r,\ l=1,2,\cdots\cdots m_\lambda)$

等ノ文字ヨリナル一ツノ順序集合 P_m ガ Aussage ヲ表ハストキハ最後ノ文字ハ p デハナイ。"

扨テ條件（Ⅰ），（Ⅱ）ガ P_m ナル順序集合ガ Aussage デアルタメノ必要充分條件デアルコトヲ知レバ，n 次ノ命題ノ數モ下ノ如ク容易ニ求メラレル。

本稿ノ最初ニ當ツテ得タ式

$$\alpha_{n+1}=\Gamma^{(1)}\alpha_n+\sum_{i_1+i_2=n}\Gamma^{(2)}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\sum_{i_1+i_2+\cdots\cdots+i_r=n}\Gamma^{(r)}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\cdots\alpha_{i_r}$$

ニ於イテ右辺ノ各項ニ含マレル $(n+1)$ 次ノ命題ハ何レモ互ニ相異ッテヰル。何故ナラバ，假リニ

$$C_{l_1}^{(\lambda_1)} A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(1)} \cdots\cdots A_{i_{\lambda_1}}^{(1)} = C_{l_2}^{(\lambda_2)} A_{i_1'}^{(2)} A_{i_2'}^{(2)} \cdots\cdots A_{i_{\lambda_2}}^{(2)}$$

トスレバ，先ヅ

$$C_{l_1}^{(\lambda_1)} = C_{l_2}^{(\lambda_2)}$$

デナケレバナラナイカラ

$$A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(1)} \cdots\cdots A_{i_{\lambda_1}}^{(1)} = A_{i_1'}^{(2)} A_{i_2'}^{(2)} \cdots\cdots A_{i_{\lambda_2}'}^{(2)}$$

コレカラ、更ニ

$$A_{i_1}^{(1)} = A_{i_1'}^{(2)}$$

デナケレバナラナイ。何故ナラバ，コノ両者ノ中何レカ一方例ヘバ $A_{i_1}^{(1)}$ ガ $A_{i_1'}^{(2)}$ ノ *echte Anfangsschnitt* デアルトスレバ先ノ條件(II)ニヨリ

$$\pi(A_{i_1}^{(1)}) \leqq \sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(A_{i_1}^{(1)}) \cdot (\lambda-1)$$

デアルコトガ必要デアル。然ルニ $A_{i_1}^{(1)}$ ハ一ツノ *Aussage* デアルカラ條件 (I) ニヨッテ

$$\pi(A_{i_1}^{(1)}) = \sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(A_{i_1}^{(1)}) \cdot (\lambda-1)+1$$

デナケレバナラナイ，之ハ互ニ矛盾スル．

依ッテ

$$A_{i_1}^{(1)} = A_{i_1'}^{(2)}$$

トナリ，従ッテ又

$$A_{i_\ell}^{(1)} \cdots\cdots A_{i_{\lambda_1}}^{(1)} = A_{i_2'}^{(2)} \cdots\cdots A_{i_{\lambda_2}}^{(2)}$$

トナル。

コレニツイテ前ト同様ノコトヲ繰返セバ，遂ニ

$$A_{i_2}^{(1)} = A_{i_2'}^{(2)}, \cdots\cdots, A_{i_{\lambda_1}}^{(1)} = A_{i_{\lambda_2}'}^{(2)}$$

ヲ得ル。之デ $\mathfrak{A}_{n+1}$ ヲ表ハス先ノ式ノ右辺カラ得ラレル命題ハ何レモ相異ルコトガ分ッタ。

従ッテ一般ニ $\mathfrak{A}_n$ ナル集合ノ元素ノ数即チ n 次ノ命題ノ数ヲ a_n デ表ハスト次ノ回帰公式ガ得ラレル。

$$\boxed{a_{n+1} = \gamma_1 a_n + \sum_{i_1+i_2=n} \gamma_2 a_{i_1} a_{i_2} + \cdots\cdots + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} \gamma_r a_{i_1} a_{i_2} \cdots\cdots a_{i_r}}$$

コヽニ $\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_r$ ハ最初ニ言ッタ如ク，位数ガ夫々 $1, 2, \cdots\cdots, r$ ナル *Operatoren* ノ数ヲ表ハス。

以上.

〔注意〕1. コレマデハ $p_i \,(i=1,2,\cdots\cdots a_0)$ ヲ *Aussagenvariablen* $C_\ell^{(\nu)} \,(\ell=1,2,\cdots\cdots\gamma_\nu)$ ヲ ν-*stellig* ナ *logischer Operator* ト考ヘタガ，$p_i \,(i=1,2,\cdots\cdots a_0)$

ヲ a_0 個ノ独立変数, $C_l^{(\nu)}$ ヲ ν-stellig ナ普通ノ Funktionen ト考ヘルト, 上述ノコトハ<u>幾ツカノ基本函数(一変数又ハ多変数ノ)ニ n 回 Iteration ヲ施シテ得ラレル形式上異ナル函数ノ数ヲ求メタコト</u>"ニナル。

以上. (1935, 9, 17)

〔注意〕2　ソレゾレ, P_m ノ μ-Anfangsschnitt 中ニ於ケル

$$\begin{cases} p \text{ ノ数ヲ} & \pi(\mu) \\ C^{(\lambda)} \text{ ノ数ヲ} & C^{(\lambda)}(\mu), \\ \sum_{\lambda=1}^{r} C^{(\lambda)}(\mu)\cdot\lambda \text{ ヲ} & \omega(\mu), \\ \sum_{\lambda=1}^{r} C^{(\lambda)}(\mu) \text{ ヲ} & n(\mu) \end{cases}$$

デ表ハシ, 特ニ

$$\pi(m)=\pi,\quad C^{(\lambda)}(m)=C^{(\lambda)},\quad \omega(m)=\omega,\quad n(m)=n$$

トシ, ω ヲ P_m ノ "Ordnung", n ヲソノ "Grad" ト名附ケルコトニスレバ, 條件 (I), (II) ハ次ノ如ク書キ直セル。

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \begin{cases} \pi=\omega-n+1 \\ \pi(\mu)\leqq\omega(\mu)-n(\mu) \qquad (\mu=1,2,\cdots\cdots,m-1) \end{cases} \\ \text{(II)} & \end{array}$$

更ニ $\pi+n=m$, $\pi(\mu)+n(\mu)=\mu$ ナル関係ヲ用フレバ

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \begin{cases} m=\omega+1 \\ \mu\leqq\omega(\mu) \qquad (\mu=1,2,\cdots\cdots m-1) \end{cases} \\ \text{(II)} & \end{array}$$

トナル。