

208. 或ル種ノ線狀移動可能函數方程式 = 就イテ (I)

北川 敏 男 (阪大)

1. サキニ、南栗氏ノ問題 = 就イテ (I), (II) = 於テ、
 函數変換 $\Lambda f \int_a^b f(x+t) d\varphi(t) =$ 関レテ、1° 任意ノ函數 —
 勿論若干ノ制限ハ附加サレネバナラヌ —— ノ展開問題ト
 2° 特ニ函數方程式 $\Lambda f = 0$ ノ解ナレ $f(x)$ ノ展開問題ト
 フ論ツタ。

此処デハ、コレト同一ノ方針デ、*linear trans-*
latable differential operator トモ云フベキ函數
 変換

$$\Gamma f(x) = \sum_{k=0}^m \int_a^b f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t)$$

= 就イテ問題 1°, 2° 論ツテ見タイ。即チ吾々ノ立場ハ、
 Γf ノ移動可能性ト線狀トニ着眼シテ論歩ヲ進メルニ在ル。
 線返スマデモナク、任意ノ實數 τ = 関シテ函數 $f(x)$ =
 $f(x+\tau)$ = 移ス函數交換ヲ T_τ デ表ハストキ、即チ

$$T_\tau f(x) \equiv f(x+\tau)$$

ト定義スルトキハ、

$$T_\tau \{ \Gamma f(x) \} = \Gamma \{ T_\tau f(x) \}$$

ナル性質ヲモツ、コレヲ函數変換ノ移動可能性トイフ。

方程式 $\Lambda f = 0$, ガソノ特別ノ場合トシテ、定係數 Dif-

ference-equation や 或種ノ積分方程式ヲ含ム如ク、
 方程式 $\Gamma f = 0$ ハ定係數ノ Difference-differential
 equation や Integro-differential equation
 ヲ含ム。之レ等ハ、一般ノ線狀ノ Difference-equation,
 Difference-differential equation 等ヨリ見レ
 バ、極メテ特殊ナモノデアアル。カナル特殊ナモノヲ特ニ論ジ
 ヤウトスルノハ、移動可能性ニ由ツテ特殊ノ方法ノ許サレル
 タメ故ニ外ナラヌノハ勿論デアアル。

從ツテ、吾人ノ立場カラシテハ、先ツ夫々ノ函数空間ニ
 於イテ線狀移動可能函数變換ノ形ヲ決定スルコトガ先決問題
 トナル。ソシテ、ソレヲガ、同一ノ方法ヲ論ジ盡サレルコト
 ガ切實ニ希望トナル。

吾々ハ、赤ダ、ソノ何レニ對シテモ答ヘテ居ラナイ。
 コノヲ論ジヤウトスル、 $\Gamma f = \psi$ イテモ、 $\mathcal{P}_k(t)$ = 大キナ
 制限ガツク、コレヲシモ線狀移動可能ト銘ウツテ論ジヤウト
 スルノハ、カナル制限ノナイ場合ニモ、同様ニ論ゼラレルデ
 アラウカトノ希望、少クモ関心ヲ有スルガタメニ外ナラナイ。

2. サテ、 $\Gamma f(x) = \psi$ イテ問題 \mathcal{L}^0 ヲ考ヘル。即チ區
 間 $(x_0, x_0 + b)$ ニ於テ m 回微分可能デ且ツ $f^{(m)}(x)$
 ガ Lebesgue 積分可能ナル $f(x)$ ヲ

$$G(\lambda) = \sum_{k=0}^m \lambda^k \int_0^b e^{\lambda t} d\mathcal{P}_k(t)$$

ノ根 λ ヲ指數トスル exponential sum $\sum \mathcal{P}_k(x) e^{\lambda x}$

形ヲ展開出來ルオヲ考ヘヌ。

茲ニ、 $\varphi_k(t)$ ($k=0, 1, 2, \dots, m$) ハ有限區間 $[0, b]$ デ有界変分ノ函數トシ

$$(i) \varphi_k(t) = \Delta_k(t) + g_k(t)$$

但シ、 $\Delta_k(t)$ ハ高々有限個ノ不連続点ヲ有スル階段函數、 $g_k(t) = \text{ツイテハ } g_k^{(k+1)}(t)$ が存在シテ且ツ全連続ナリトスル。コノ假定カラ

$$(ii) \quad G(\lambda) = \sum_{k=0}^m \sum_{g=0}^{\infty} A_{k,g} \lambda^k e^{\lambda h_g} + \sum_{k=0}^m \lambda^k \left\{ \sum_{p=1}^{k+1} \left[\frac{(-1)^{p-1} e^{\lambda t} g_k^{(p)}(t)}{\lambda^k} \right]_0^b + \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}} \int_0^b e^{\lambda t} g_k^{(k+1)}(t) dt \right\}$$

トナル。 ($0 = h_0 < h_1 < h_2 < \dots < h_n = b$; $A_{k,g}$ ノ値チテ零ニナルモノガアルカモ知レヌ。シカジ $g \neq 0$, n ナラバ少クモ一ツ、零デナシ $A_{k,g}$ が各 $g = \infty$ テイル)

$$\text{今 } L(x_0, x, \lambda; f) = \sum_{k=0}^m \int_0^b e^{\lambda \eta} \left(\int_{x_0}^{x_0+\eta} e^{-\lambda t} f^{(k)}(t) dt \right) d\varphi_k(\eta)$$

$$R(x_0, x, \lambda; f) = \sum_{p=1}^m \sum_{i=0}^{p-1} \lambda^i f^{(p-1-i)}(x_0) e^{-\lambda x_0} \int_0^b e^{\lambda \eta} g_p'(\eta) d\eta$$

$$+ \sum_{p=1}^m \sum_{g=0}^{\infty} A_{p,g} e^{h_g \lambda} \lambda^p \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\lambda^i}{\lambda^p} f^{(p-1-i)}(x_0) e^{-\lambda x_0}$$

ト置イテ

$$(I) \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)} \left\{ L(x_0, x, \lambda; f) + K(x_0, x, \lambda; f) \right\} d\lambda \\ \equiv S_r(x_0, x; f)$$

ヲ考ヘル, (コレハ $k=0$ ト置ケバ, 前述 Δf ノ場合ノ *contour-integral* = ナツテ非ズ). 吾々ハ先ヅ, 適當 = *Contour* ノ *sequence* $\{C_r\}$ ヲトレバ, $r \rightarrow \infty$ ノトキ,

$$S_r(x_0, x; f) \rightarrow f(x) \quad (x_0 < x < x+b)$$

トナルコトヲ示サシ。以下大体ノ方針ト必要ト豫備定理トヲ略述シマシ。

3. 先ヅ, $G(\lambda)$ ヲバ *Langer* ノ定理 (前出) = ヨツテ *Exponential sum* = 直ス; 即チ

$$(iii) \quad G(\lambda) = \sum_{g=0}^n \sum_{k=0}^{k_g} A_{k,g} \lambda^k + [B] \lambda^{l_n} e^{\lambda b} - [C] \lambda^{l_0} \\ = \left\{ [A_{k_0,0}] \lambda^{k_0} - [C] \lambda^{l_0} \right\} + \sum_{g=1}^{n-1} [A_{k_g,g}] \lambda^{k_g} e^{k_g \lambda} \\ + \left\{ [A_{k_n,n}] \lambda^{k_n} e^{\lambda b} + [B] e^{\lambda b} \lambda^{l_n} \right\} \\ = [A_0] \lambda^{\delta_0} + [A_n] \lambda^{\delta_n} e^{\lambda b} + \sum_{g=1}^{n-1} [A_g] \lambda^{k_g} e^{k_g \lambda}$$

ト置ク。此処 = A_r ($r=0, 1, 2, \dots, n$) ハ悉ク係ナラズトスル。又, l_n, l_0 ハ ≥ -1 ナル整数トスル, 従ツテ δ_0, δ_n 又然リ。以上ノ事情, ε トニ於イテ次ノ如ク準備シテ

置フ。

豫備定理1.

$$\oint_{C_r} \frac{e^{\lambda \delta} d\lambda}{\lambda^i G(\lambda)} \rightarrow 0 \quad (0 < \delta < b, \tau \neq) \quad (i \geq 1)$$

豫備定理2.

$$\oint_{C_r} \frac{e^{-\lambda \delta} G^{\delta}(\lambda)}{\lambda G(\lambda)} d\lambda \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty, \tau \neq)$$

但シ $0 < \delta < h_{\delta}$

且ツ

$$\begin{aligned} G^{\delta}(\lambda) &= \sum_{k=0}^m \sum_{\vartheta=\delta}^n A_{k,\vartheta} \lambda^k e^{\lambda h_{\vartheta}} + \sum_{k=0}^m \lambda^k \int_{h_{\delta}}^b e^{\lambda \eta} g'_k(\eta) d\eta \\ &= \sum_{k=0}^m \lambda^k \int_{h_{\delta}}^b e^{\lambda t} g'_k(t) dt \end{aligned}$$

豫備定理3.

$$\oint_{C_r} \frac{e^{\lambda \delta} G_{\delta}(\lambda)}{\lambda G(\lambda)} d\lambda \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty, \tau \neq)$$

但シ $0 < \delta < h_{\delta}$

且ツ

$$\begin{aligned} G_{\delta}(\lambda) &= \sum_{k=0}^m \lambda^k \int_0^{h_{\delta}} e^{\lambda t} g'_k(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{\vartheta=0}^{\delta-1} A_{k,\vartheta} \lambda^k e^{\lambda h_{\vartheta}} + \sum_{k=0}^m \lambda^k \int_{h_{\delta}}^b e^{\lambda \eta} g'_k(\eta) d\eta \end{aligned}$$

4. $\lambda = L(x_0, x, \lambda; f) + K(x_0, x, \lambda; f)$ ヲ命
解スル。

$$L(x_0, x, \lambda; f)$$

$$= \sum_{\delta=1}^n \left\{ \sum_{k=0}^{\pi} \sum_{g=\delta}^{\pi} A_{k,g} e^{\lambda h g} \int_{x_0+h_{\delta-1}}^{x_0+h_{\delta}} e^{-\lambda \mu f^{(k)}(\mu)} d\mu \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^m \int_{x_0+h_{\delta-1}}^{x_0+h_{\delta}} e^{-\lambda t f^{(k)}(t)} \left(\int_{t-x_0}^b e^{\lambda \eta} g'_k(\eta) d\eta \right) dt \right\}_{\delta}$$

ト書キ直シ $\{ \}$ 各々ヲバ目標ニスル。

ソコデ記載ヲ短縮スルタメ次ノ如ク置ク：

$$l_{\delta}(x_0, \lambda; \beta; f) \equiv \sum_{k=0}^{\pi} \sum_{g=\delta}^{\pi} A_{k,g} e^{\lambda h g} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda \mu f^{(k)}(\mu)} d\mu \\ + \sum_{k=0}^m \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda t f^{(k)}(t)} \left(\int_{t-x_0}^b e^{\lambda \eta} g'_k(\eta) d\eta \right) dt$$

$$j_{\delta}(x_0, \lambda; \beta; f) \equiv \sum_{k=0}^m \sum_{g=0}^{\delta-1} A_{k,g} e^{\lambda h g} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda \mu f^{(k)}(\mu)} d\mu$$

$$m(x_0, \lambda; \gamma; f) \equiv \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{k-1} \lambda f^{(k-i)}(\gamma) e^{-\lambda \gamma} \int_0^b e^{\lambda \eta} g'_k(\eta) d\eta$$

$$n_t(x_0, \lambda; \gamma; f) \equiv \sum_{k=1}^m \sum_{g=t}^{\pi} A_{k,g} \lambda^k e^{k g \lambda} e^{-\lambda \gamma} \sum_{i=\delta}^{k-1} \frac{\lambda^i}{\lambda^k} f^{(k+i)}(\gamma)$$

コノ各々 = $\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)}$ ヲカケ、 γ 番目ノ Contour C_{γ}

デ積ムシタモノヲ夫々大文字デ

$$L_{\Delta}^r(x_0, x; \frac{\beta}{\alpha}: f), J_{\Delta}^r(x_0, \lambda; \frac{\beta}{\alpha}: f), M^r(x_0, x; \gamma: f),$$

$$N_{\Delta}^r(x_0, x; \gamma: f)$$

ヲ表ハス。

又

$$M^r(x_0, x; \gamma: f) + N_{\Delta}^r(x_0, x; \gamma: f) \equiv K^r(x_0, x; \gamma: f)$$

ト置ク。然レトキ

豫備定理4:

$$L_{\Delta}^r(x_0, x; \frac{\beta}{\alpha}: f)$$

$$= -J_{\Delta}^r(x_0, x; \frac{\beta}{\alpha}: f) + \left[K^r(x_0, x; \gamma: f) \right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)} \left\{ \sum_{k=0}^m \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda t} f^{(k)}(t) dt \left(\int_0^{t-x_0} e^{\lambda \eta} g_k'(\eta) d\eta \right) \right\} d\lambda$$

豫備定理5:

$$x > x_0 + h_{\Delta} + \varepsilon \text{ ヲ}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ L_{\Delta}^r(x_0, x; \begin{matrix} x_0 + h_{\Delta} \\ x_0 + h_{\Delta-1} \end{matrix} : f) \right.$$

$$\left. - \left[K^r(x_0, x; \gamma: f) \right]_{\gamma = x_0 + h_{\Delta-1}}^{\gamma = x_0 + h_{\Delta}} \right\} = 0$$

豫備定理6:

$$x < x_0 + h_{\Delta-1} + \varepsilon \text{ ヲ}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L_{\Delta}^r(x_0, x; \begin{matrix} x_0 + h_{\Delta} \\ x_0 + h_{\Delta-1} \end{matrix} : f) = 0$$

豫備定理 1:

$$x_0 + h_{s+1} > x > x_0 + h_s + \bar{\epsilon}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ L_{s+1}^r(x_0, x, \begin{matrix} x_0+h_{s+1} \\ x_0+h_s \end{matrix}; f) + K^r(x_0, x, x_0+h_s; f) \right\} \\ = f(x)$$

以上ノ如キ準備ノ下ニ於テ $x_0 + h_{s^*} < x < x_0 + h_{s^*+1}$

トスレバ

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{e^{\lambda x} \{L(x_0, x, \lambda; f) + K(x_0, x, \lambda; f)\}}{G(\lambda)} d\lambda \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)} \left\{ \sum_{s=1}^n l_s(x_0, x; \lambda; f) + K + \gamma(x_0, x, \lambda; f) \right\} d\lambda \\ = \sum_{s=1}^n L_s^r(x_0, x, \begin{matrix} x_0+h_s \\ x_0+h_{s-1} \end{matrix}; f) + K^r(x_0, x, x_0; f) \\ \rightarrow \sum_{s=1}^{s^*} \left[K^r(x_0, x, \gamma; f) \right]_{\gamma=x_0+h_{s-1}}^{\gamma=x_0+h_s} + K^r(x_0, x, x_0; f) \\ + f(x) - K^r(x_0, x, x_0+h_{s^*}; f) \\ = f(x) \quad (r \rightarrow \infty, \text{トキ})$$

依ツテ

定理 1. $G(\lambda) = \sum_{k=0}^m \lambda^k \int_0^b e^{\lambda t} d\varphi_k(t) = \text{関シテ假定(i),}$

(ii), (iii) ヲ設ケ、函数 $f(x)$ ノ區間 $[x_0, x_0+b]$ ニ m 回
微分可能ナリ且ツ $f^{(m)}(x)$ ノ Lebesgue 積分可能ナリトス

レバ

(I) = 於 λ 定義 \neq λ 積分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{e^{\lambda x} \{L(x_0, x, \lambda; f) + K(x_0, x, \lambda; f)\}}{G(\lambda)} d\lambda$$

$$\rightarrow f(x) \quad (r \rightarrow \infty)$$

ナラ様 = $\{C_r\}$ \neq λ \neq λ \neq λ

但 λ $x_0 + h_\delta < x < x_0 + h_{\delta+1}$ ($\delta = 0, 1, 2, \dots, n-1$)

トス。