203. 連續ナ環ニ於ケル群 $G_s \cdot G_t = G_{s+t}$ ニツイテ

南雲道夫（阪大）

角谷君ノ問題（昨日、即チ九月十一日ノ會話デ）

"$\int_0^1 K(x,u;s)K(u,y;t)du = K(x,y;s+t)$

ナル $K(x,y;s)$ ヲ求ム" ト云フ問題ヲ次ニ一般的ナ連續ナ環（Ring）ニ於テ解クノガ主眼デアル。

$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ ニ於ケル連續函数 $K(x,y)$ ノ集合ハ

$$\int_0^1 K_1(x,u)K_2(u,y)du = K_3(x,y)$$

ヲバ K_1, K_2 ノ積トスルトキ，連續ナ Ring ヲ作ル、又一般ノ線狀空間ニ於ケル連續ナ一次變換モ連續ナ Ring ヲ作ル（連續ナ Ring ノ定義ハ次ニ述ベル）

一般ニカヽル Ring ニ於ケル One parameter 群

$$G_s \cdot G_t = G_{s+t}$$

[s, t ハぱらめたー] ヲ見出スノガ茲ノ問題デアル。

I 連續ナ環ノ定義

$\mathfrak{R}$ ハ次ノ性質ヲ有スル要素ノ集合デアルトキ連續ナ Ring ト云フ。

1. $\mathfrak{R}$ ノ要素ハ加法群ヲ作ル。即チ

$$(A \in \mathfrak{R},\ B \in \mathfrak{R}) \longrightarrow A+B = C \in \mathfrak{R}$$

且ツ $A+B$ ナル結合ニツイテ可換群ヲナス。

2. 積ガ定義サレテヰル。

$$(A\in\mathcal{R},\ B\in\mathcal{R})\longrightarrow A\cdot B=C\in\mathcal{R}$$

積ハ組合セノ法則

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

及分配ノ法則ニ從フ.

$$(A+B)\cdot C=AC+BC$$

$$A\cdot(B+C)=AB+AC$$

3. 實數ノ集合ヲ *Operator* トシテ有スル。a 任意ノ實數トスルトキ　$A\in\mathcal{R}\longrightarrow aA\in\mathcal{R}$

$$a(a'A)=(aa')A$$

$$(a+a')A=aA+a'A$$

$$a(A+B)=aA+aB$$

$$(aA)B=A(aB)$$

$$1A=A,\quad 0A=0$$

4. 絶對値ガ定義サレテヰル.

$$|A|\geqq 0\quad(\text{實數})$$

(4.1)　$A\neq 0\longrightarrow |A|>0$

(4.2)　$|A+B|\leqq|A|+|B|$

(4.3)　$|aA|=|a||A|$

(4.4)　$|A\cdot B|\leqq|A|\cdot|B|$

5. 絶對値ニヨリ距離 $|A-B|$ ガ定義サレ、從ッテ極限ガ普通ノトホリニ定義サレル。

$\mathfrak{R}$ ハ完全ナ距離空間ヲナス、即チ ε ヲ任意ノ正ノ数トスル時，$n, n' > N_\varepsilon$ ナラバ

$$|A_{n'} - A_n| < \varepsilon$$

ナル様ナ自然数 N_ε ガ存在スレバ，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ ガ $\mathfrak{R}$ ニ存在スル。

以上ノ性質ヲ全部具ヘタ場合ニ $\mathfrak{R}$ ヲ連続ナ環ト名付ヨウ。

1.2.3. ノ成立ハ具体的ナ例ニ於テ成立スルコトハ容易ニ分ル。

4. ノ性質ハ $\int_G \mathrm{K}_1(x, u)\,\mathrm{K}_2(u, y)\,du = \mathrm{K}_3(x, y)$ ノ場合ニハ

(α) $|\mathrm{K}| = m(G)\cdot \underset{G}{\mathrm{Max}}|\mathrm{K}(x,y)|$

(但シ $m(G)$ ハ領域ノ測度) トスルカ，又ハ

(β) $$|\mathrm{K}| = \left(\iint_{G\,G} |\mathrm{K}(x,y)|^2\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

トスレバヨイ。

又線状空間ニ於ケル一次変換ノ場合ニハ

$$|A| = \frac{|A\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{x}|} \text{ ノ上限}$$

トスレバヨイ。

5. ノ性質ハ (α) デハ一様収斂ニヨリ $\mathfrak{R}$ ガ連続函数全体ヨリ成リ $m(G)$ ガ有限ナラバ成立．(β) デハ Riesz-Fischer ノ定理ニヨリ $\iint \mathrm{K}^2\,dx\,dy$ 有限ナル $\mathrm{K}(x,y)$ 全体カラ $\mathfrak{R}$ ガ出来テヰレバヨイ。

又線狀空間ガ完全デアレバ之レニ屬スル連續ナ一次変換ノ全体 $\mathfrak{R}$ ハ又完全デアル。

II 準 備

$\mathfrak{R}$ ノ要素ガ實変數 t ノ連續函數 $A(t)$ ナルトキ，之ヲ t デ積分スルコトガ出來ル。

$$\int_0^s A(t)\,dt = B(s)$$

積分ノ定義ハ Riemann 積分ト同様デアル。［收斂ハ Cauchy ノ條件ニヨル］　又微分モ普通ノ場合ト同様ニ定義出來ル。

ソコデ $\int_0^s A(t)\,dt$ ハ s ニツキ一様ニ微分出來ル、シカシテ

$$\frac{d}{ds}\int_0^s A(t)\,dt = A(s)$$

又 $B(s)$ ガ s ニツキ一様ニ微分出來テ $\dfrac{dB(s)}{ds} = A(s)$

ナラバ　$\displaystyle\int_\alpha^\beta A(t)\,dt = A(\beta) - A(\alpha)$

和ヤ積ニ關シテハ普通ノ場合ト同様ナ方法ガ用ヒラレル。一々之ヲ述ベルノハ略スル。

$\mathfrak{R}$ ニハ一般ニハ單位 $\mathbb{1}$ ガ存在シナイ。〔$\mathbb{1}$ ハ次ノ性質ヲ有ス。　$\mathbb{1}A = A\mathbb{1} = A$

$|\mathbb{1}| = 1$

然シ$\mathfrak{R}$ = $\mathbb{1}$ガ存在セヌトキニハ之ヲ附ケ加ヘルコトガ出来ル。

絶對値ハ $|a\mathbb{1}+A|=|a|+|A|$ トスレバヨイ。

$\mathbb{1}$ヲ附ケ加ヘタ$\mathfrak{R}$ヲ$\mathfrak{R}_1$デ示ス。$\mathfrak{R}_1$ニ於テ

$|A-\mathbb{1}|<1$ ナラバ

$$A'A=AA'=\mathbb{1}$$

ナル A' ガ存在スル（一義的）。ソレニハ $A-\mathbb{1}=B$ トシテ

$$A'=\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nB^n \qquad \text{（収斂ス！）}$$

トオケバヨイ。之ヲ A^{-1} デ示ス。

III. 本論

$\mathfrak{R}$ノ要素 $G(t)$ ガ實変数 t $(-\infty<t<+\infty)$ ノ連續ナ函數ヲナシテ居テ t ニツイテ加法群，即チ

$$G(t)G(s)=G(s+t)$$

ナルモノトシ、カヽル $G(t)$ ノ一般ノ形ヲ求メヨウ。

特ニ $G(0)=A$ ト置ケバ

$$\begin{cases} AG(t)=G(t)A=G(t) \\ A^2=A \end{cases}$$

Aガ單位 $\mathbb{1}$ デアレバソノマヽ，$\mathbb{1}$デナケレバ$\mathfrak{R}_1$ニ於イテ

$\mathbb{1}-A=\bar{A}$ トオケバ，容易ニ

$$\bar{A}^2=\bar{A},$$

$$\bar{A}G(t)=G(t)\bar{A}=0.$$

ソコデ $\bar{A}+G(t)=H(t)$ トオケバ，容易＝

$$H(s)H(t)=H(t+s),$$
$$H(0)=1\!\!1.$$

$H(t)$ ハ勿論連続デアル．次＝ $H(t)$ ノ群ヲ考ヘル

$$\int_0^s H(t)\,dt=H^*(s)$$ トオケバ容易＝

$$H^*(s)H(t)=H^*(t+s)-H^*(s).$$

$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}H^*(s)=H(0)=1\!\!1$ ナル＝ヨリ，s ノ充分小ナル時＝ハ，$H^{*^{-1}}(s)$ ガ存在スル。

故＝ $$H(t)=H^{*^{-1}}(s)\left\{H^*(t+s)-H^*(s)\right\}.$$

右辺ハ t ＝ツキ一様＝微分可能デアル．故＝ $H(t)$ ハ一様＝微分可能デナケレバナラヌ（t ノ任意ノ閉區間デ！）．

ソコデ $H(s)H(t)=H(s+t)$ ヲ s デ微分スレバ

$$H'(s)H(t)=H'(s+t)$$

$s=0$，$H'(0)=B$ トオケバ

$$\frac{dH(t)}{dt}=BH(t)$$

故＝

$$H(t)=1\!\!1+B\int_0^t H(u)\,du$$

之ハ *Lipschitz* ノ條件ノ成立シテヰル場合ノ *Picard* ノ逐次反覆法＝ヨル方法ト全ク同様ノ方法デ解ケル。

ソノ結果ハ

$$H(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^n}{n!} t^n \quad (一様ニ收斂ス!)$$

元ノ群 $G(t)$ ニモドルニハ

$$AH(t) = H(t)A = AH(t)A = G(t)$$

$(A\bar{A} = \bar{A}A = 0)$ ナルニヨリ, $ABA = C$ トスレバ

$$G(t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^n}{n!} t^n$$

ヲ得ル。 A ハ $A^2 = A$, C ハ $AC = CA = C$ ナル $\mathcal{R}$ ノ任意ノ要素デアル。

IV 應　用

$$\int_0^1 \mathbb{K}(x, u; s)\mathbb{K}(u, y; t)\,du = \mathbb{K}(x, y; s+t)$$

先ヅ此ノ場合ノ A ニ相當スル要素 (*Idempotent*) ヲ求メヨウ。

$\mathbb{K}(x, y; 0) = A(x, y)$ トオケバ

$$A(x, y) - \int_0^1 A(x, u)A(u, y) = 0$$

之ハ第二種 *Fredholm* 積分方程式ノ *homogen* ナ場合デアル ($A(x, y)$ ヲ x ノ函數トシテ考ヘテモ y ノ函數トシテ考ヘテモ). 從ッテ *Fredholm* ノ定理ニヨリ各変數ニツキ高々有限個ノ一次的特立ナ函數ノ一次結合 (*Eigenfunktion* 有限個) デアル、故ニ

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)\, g_i(y)$$

之ヲ $A^2=A$ ニ代入スレバ

$$\int_0^1 f_i(u)\,g_j(u)\,du=\delta_{ij}$$

次ニ C ヲ求ムルニハ，ABA＝C ニヨリ結局

$$C(x,y)=\sum_{ij}^{k} c_{ij}\,f_i(x)\,g_i(y)$$

L ヲ任意ノ k 次ノ *matrix* (l_{ij}) トスル時

$$L[f,g]=\sum_{ij}^{k} l_{i,j} f_i(x)\,g_j(y)$$

ナル記号ヲ用ヒレバ

$$K(x,y;t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n C^n}{n!}\left[f(x),\,g(x)\right]$$

トナル。但シ初項ハ $\sum_{i=1}^{k} f_i(x)\,g_i(y)$ デアル。

――― （以上） ―――