202. 函數方程式 $f(f(x))=F(x)$ ニ就テ II

南雲道夫（阪大）

變數ガ real ノ時ニハ適當ナ假定ノ下ニ一般ニ

$$\underbrace{ff\cdots\cdots f}_{k}(x)=F(x)$$

ナル函數方程式ガ解カレルコトヲ前ニ示シタ。即チ補助ノ函數方程式

$$\varphi(t+1)=F(\varphi(t))$$

ヲ解ケバ

$$f(x)=\varphi\left(\varphi^{-1}(x)+\frac{1}{k}\right)$$

ガ解デアル。此ノ際解ハ非常ニ大キナ自由度ヲ持ツ。

I. 次ニ $F(x)$ ガ $x=x_0$ デ解析的正則デ、且ツ

$F(x_0)=x_0$。

ナル場合ニ、x_0デ正則デ $f(x_0)=x_0$ ナルヤウナ解ヲ求メテ見ヨウ。

$x_0=0$ ト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。今度ハ $x=0$ ガ，$F(x)=x'$ ナル変換ノ不動点デアルカラ，之レヲ Translation ニ改メルヤウナ寫像ガ出來ナイ．然シ原点ヲ中心トスル相似変換

$$t'=\lambda t \qquad (\lambda;\ 常数)$$

ニ改メル様ナ寫像ガ一般ニハ可能デアル。即チ

$$\varphi(\lambda t)=F\bigl(\varphi(t)\bigr)$$

ガ $t=0$ デ正則ナ解 $\bigl(\varphi'(0)\neq 0\bigr)$ $\varphi(t)$ ヲ持テバ

$$f(x)=\varphi\Bigl(\lambda^{\frac{1}{k}}\varphi^{-1}(x)\Bigr)$$

ガ求ムル解デアルコトガ容易ニ分ル.

II. カクシテ我々ハ

$$\varphi(\lambda t)=F\bigl(\varphi(t)\bigr)$$

ヲ解カネバナラヌ。$F(x)=cx+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\cdots$，$\varphi(t)=at+a_2t^2+a_3t^3+\cdots\cdots$ ト置イテ両辺ニ代入シ t^n ノ係數ヲ比較スルコトニヨリ形式的ニ順次ニ a_n ヲ求メルコトガ出來ル。（但シ $c\neq 1$）此ノ場合ニ $\lambda=c$ デナケレバナラヌ。又 $\varphi(t)$ ハ一ツノ不定常数ヲ含ム。

〔$\varphi(t)$ ノ代リニ $\varphi(\alpha t)$ トオイテモ解デアルカラ〕故ニ我々ハ $\varphi'(0)=1$ ト假定スル。

上ノ未定係数ノ方法デハ，カクシテ得ラレタ冪級数ノ收斂ノ吟味ガムヅカシイ。ソコデ我々ハ $\varphi^{-1}(x)=\psi(x)$ トオケ

バ函數方程式ハ〔$t=\psi(x)$ ニヨリ〕

$$\lambda\psi(x)=\psi(F(x))$$

トナル。之ハ Schröder ノ函數方程式ト云ハレル。

（福原氏，常微分方程式論 195 頁）

$|\lambda|>1$ （$\lambda=C$）ノトキニハ $F(x)$ ノ逆函數ヲ $G(x)$ トスレバ

$$\psi(G(x))=\frac{1}{\lambda}\psi(x)$$

トナリ、$|\lambda|<1$ ノ場合ニ帰着出來ル。故ニ $|\lambda|<1$ ト假定スル、シカラバ

$$\lambda^{-n}\underbrace{FF\cdots\cdots F}_{n}(x)=F_n(x) \qquad (\lambda=C)$$

トオケバ、$F_n(x)$ ハ $x=0$ ノ充分近クデ一様ニ收斂スル。（福原氏，常微分方程式論 195 頁 —— 197 頁參照）又

$$\lambda F_{n+1}(x)=F_n(F(x))$$

デアルカラ $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=\psi(x)$ トオケバ

$$\lambda\psi(x)=\psi(F(x)). \quad 又\ \psi'(0)=1.$$

故ニ $C\neq 0$，且ツ $|C|\neq 1$ ノ場合ニ於テ問題ハ解決シタ。

然シ只不動点ノ近傍ダケデ全体ノ様子ハサッパリ分ラナイ。

今マデノ所ハ見識ノ類デアラウ、全体的考察ヨリ大問題デアル。