

200. 個体領域ノ個數條件ニ就イテ. I

平野次郎 (阪大)

此處ニ極メテ断片的ニ個体領域ノ個數ニ就イテ述ベヨウト思フ、個數條件ニツイテハ一般ニ次ノ式ガ基本的デアアル。

$$(1) (E_x)(E_y) \dots (E_v)(w)(w \neq x \& w \neq y \& \dots \dots \dots \& w \neq v \rightarrow A(w))$$

$$\infty (x)(y) \dots (v)(w)(x \neq y \& x \neq z \& \dots \dots \dots \& v \neq w \rightarrow A(x) \vee A(y) \vee \dots \dots \vee A(w))$$

及ビ

$$(2) (x)(y) \dots (v)(\exists w)(w \neq x \& w \neq y \& \dots \dots \dots \& w \neq v \& A(w))$$

$$\infty (E_x)(E_y) \dots (E_v)(w)(x \neq y \& x \neq z \& \dots \dots \dots \& v \neq w \& A(x) \& A(y) \& \dots \dots \& A(w))$$

(D. Hilbert u. P. Bernarp: Grundlagen der Mathematik S. 173.)

ソコデハ非帯ニ煩雜デアルト云フ理由デ、此ノ証明 (Ab-
leitung) ガ興ヘラレテキナイ。然シ、コノ式ハ重要ナ式
デアアルカラ初メニ之レニツイテ証明ヲ興ヘテ見タイト思フ。
新タナル Princip ヲ使用セズニ他ニ簡單ニ証明ガアレバ
御教示ヲ御願ヒシタイ。

Lemma: $F_m(a, A) \rightarrow A(b) \vee F_m(b, A)$

コトニ

$$F_m(a, A): \prod_{i=1}^m (x_i) \left(\sum_{i \neq j}^{1, m} (x_i \neq x_j) \& \sum_{i=1}^m (x_i \neq a) \right) \rightarrow \prod_{i=1}^m A(x_i)$$

$$m=1 \text{ のときは } F_1(a, A): (x) (x \neq a \rightarrow A(x))$$

$$F_1(a, A) \Leftrightarrow (x) A(x) \vee (\bar{A}(a) \& (x)(y) (x \neq y) \rightarrow A(x) \vee A(y))$$

$$F_1(a, A) \rightarrow (x) A(x) \vee (2x) A(x)$$

$$(x) A(x) \rightarrow (2x) A(x) \equiv \vee (x) A(x) \vee (2x) A(x) \Leftrightarrow (2x) A(x)$$

$$F_1(a, A) \rightarrow (x)(y) (x \neq y \rightarrow A(x) \vee A(y))$$

$$(x)(y) (x \neq y \rightarrow A(x) \vee A(y)) \rightarrow (x) (x \neq b \rightarrow A(x)) \vee A(b). \quad (y=b)$$

$$\text{Kettenschluss } \equiv \vee F_1(a, A) \rightarrow F_1(b, A) \vee A(b)$$

次 =

$$F_{m-1}(a, A) \rightarrow F_{m-1}(b, A) \vee A(b)$$

ヲ 假定スル。

$$F_m(a, A): \prod_{i=1}^m (x_i) \left(\sum_{i \neq j}^m (x_i \neq x_j) \& \sum_{i=1}^m (x_i \neq a) \right) \rightarrow \prod_{i=1}^m A(x_i)$$

$$F_m(a, A) \rightarrow \prod_{i=1}^{m-1} (x_i) \left(\sum_{i \neq j}^{m-1} (x_i \neq x_j) \& \sum_{i=1}^{m-1} (x_i \neq a) \right) \rightarrow \prod_{i=1}^{m-1} (x_i = b \vee A(x_i))$$

$$\vee a = b \vee A(b). \quad (x_m = b)$$

$$F_m(a, A) \rightarrow F_{m-1}(a, \sigma) \vee a = b \vee A(b).$$

$$\sigma: x = b \vee A(x)$$

假定 $\exists \eta$

$$F_{m-1}(a, \sigma) \rightarrow F_{m-1}(c, \sigma) \vee \sigma(c)$$

$$F_{m-1}(c, \sigma) \vee \sigma(c):$$

$$\prod_{i=1}^{m-1} (x_i) \left(\sum_{i \neq j}^{1, m-1} (x_i \neq x_j) \ \& \ \sum_{i=1}^{m-1} (x_i \neq c) \ \& \ \sum_{i=1}^{m-1} (x_i \neq b) \right. \\ \left. \ \& \ c \neq b \rightarrow \left(\prod_{i=1}^{m-1} A(x_i) \right) \vee A(c) \right) : G_{m-1}(b, c)$$

$$\text{故} = . F_m(a, A) \rightarrow a = b \vee A(b) \vee G_{m-1}(b, c)$$

$$F_m(a, A) \ \& \ a \neq b \ \& \ A(b) \rightarrow G_{m-1}(b, c)$$

$$F_m(a, A) \ \& \ a \neq b \ \& \ \bar{A}(b) \rightarrow (Z) G_{m-1}(b, Z)$$

$$(Z) G_{m-1}(b, Z): F_m(b, A)$$

故 =

$$F_m(a, A) \rightarrow a = b \vee A(b) \vee F_m(b, A)$$

$$a = b \rightarrow \bar{F}_m(a, A) \vee \bar{F}_m(b, A) \exists \eta$$

$$F_m(a, A) \rightarrow A(b) \vee F_m(b, A).$$

Q. E. D.

$$(1) \prod_{i=1}^{m-1} (E x_i)(x_m) \left(\sum_{i=1}^{m-1} (x_m \neq x_i) \rightarrow A(x_m) \right)$$

$$\infty \prod_{i=1}^m (x_i) \left(\sum_{i \neq j}^{1, m} (x_i \neq x_j) \rightarrow \prod_{i=1}^m A(x_i) \right)$$

(2) ハ (1) ト dual デアルカラ (1) ノミヲ証明スレバヨイ。

$m=1$ ノトキハ既ニ成立スル故 m デ成立スルモノト假定シ $m+1$ ノトキ又成立スルニトヲ証明スル。

(1) = 於テ、 $A(x)$ ノ代リ $x = a \vee A(x)$ ヲ代入スルトキハ (1) = 於ケル *getundene Variablen* ヲ変換シテ

$$\prod_{i=1}^m (Ex_i)(x_{m+1}) \left(\sum_{i=1}^m (x_i \neq x_{m+1}) \rightarrow A(x_{m+1}) \right)$$

$$\sim (Ex_1) \prod_{i=2}^{m+1} (x_i) \left(\sum_{i,j}^{1, m+1} (x_i \neq x_j) \rightarrow \prod_{i=2}^{m+1} A(x_i) \right) \dots (1)$$

Lemma \exists 1) $F_m(a, A) \rightarrow A(b) \vee F_m(b, A)$

2). $F_m(a, A) \rightarrow (z) (A(z) \vee \bar{F}_m(z, A))$

右辺ハ $\prod_{i=1}^{m+1} (x_i) \left(\sum_{i \neq j}^{1, m+1} (x_i \neq x_j) \rightarrow \prod_{i=1}^{m+1} A(x_i) \right) :$

$$({}_{m+1}x) A(x)$$

$$F_m(a, A) \rightarrow ({}_{m+1}x) A(x)$$

β). $(Ex) F_m(z, A) \rightarrow ({}_{m+1}x) A(x)$

\Rightarrow 左辺ハ (1) > 右辺 \Rightarrow 下ル。(getundene Variablen ノ記号ハ適當ニ附テレバヨイ)。

$$\text{逆} = \prod_{i=1}^{m+1} (x_i) \left(\sum_{i \neq j}^{1, m+1} (x_i \neq x_j) \rightarrow \prod_{i=1}^{m+1} A(x_i) \right)$$

$$\rightarrow F_m(a, A) \vee A(a)$$

然ルニ

$$F_m(a, A) \vee A(a) \Leftrightarrow \overline{F}_m(a, A) \rightarrow A(a)$$

$$(m+1, x) A(x) \rightarrow (\overline{F}_m(a, A) \rightarrow A(a))$$

$$\hookrightarrow (m+1, x) A(x) \rightarrow (z) (\overline{F}_m(z, A) \rightarrow A(z))$$

$$(z) (\overline{F}_m(z, A) \rightarrow A(z)) \rightarrow ((z) \overline{F}_m(z, A) \rightarrow (z) A(z))$$

$$\quad \rightarrow (z) A(z) \vee (Ez) F_m(z, A)$$

$$(z) A(z) \rightarrow (Ez) F_m(z, A) \exists \parallel$$

Kettenschluss = $\exists \parallel$

$$(m+1, x) A(x) \rightarrow (Ez) F_m(z, A)$$

右辺ハ (1') の右辺デアルカラ之ヲ証明サレタ。

コノ場合, Induktion ハ勿論有限的ノ意味デアル。

— (未完) —