199. Reguläre Anfangszahl mit Limeszahlindex ニ就テ

黒田成勝（東京女高師）

標題ニ掲ゲタ順序數ガ集合論デ取扱ハレテヰルニモ拘ラズ、更ニ又コノ種ノ数ヲ考ヘルコトガ矛盾ノ誘因ニナルトハ考ヘラレナイニモ拘ラズ、コノ数ノ存在ヲ主張出來ルヤウナ集合論ノ公理系ガ見當リマセン。ドコカニアリマシタラ御教示願ヒタイ次第デス。

ソレデコノ数ガ存在スルヤウニ集合領域ヲ拡張スルニハ Zermelo, Grenzzahlen und Mengenbereich (Fund. Math. 16, 1930) ニ関聯シテ次ノヤウナコトガ考ヘラレマス。先ヅ含クノ便宜ノタメニヨク知ラレテヰル言葉ノ定義カラ始メタク思ヒマス。以下ギリシヤ字ハ皆順序數。

I、$\alpha, \beta, \beta < \alpha$ ガ極限数デアルトキ，適當ナ順序數ノ列

$$\rho_0, \rho_1, \cdots\cdots \rho_\nu, \cdots\cdots\cdots, \nu < \beta,$$

ニ對シテ

$$\lim_{\nu<\beta} \rho_\nu = \alpha$$

トナルナラバ α ハ β ト *konfinal* デアルト云フ。

II. 自分自身トノミ *konfinal* デアル數ヲ *regulär* ト云フ（例ヘバ ω）。

III. 超限順序數ヲ數ノ類ニ分ッテ各類ノ *Anfangszahl* ヲ大キサノ順ニ

$$\omega, \omega_1, \cdots\cdots \omega_\omega, \cdots\cdots \omega_{\omega_1} \cdots\cdots \omega_{\omega_\omega} \cdots\cdots$$

トスルトキ．ω ノ *Index* ガ *Limeszahl* デアル如ウナ *reguläre Anfangszahl* ヲ *Reguläre Anfangszahl mit Limeszahl Index* 又ハ *exorbitante Zahl* ト云フ。

Exorbitante Zahl ガ存在スル如ウニスルタメニ *Zermelo-Fraenkel-v. Neumann* ノ公理系ニ次ノ公理ヲツケ加ヘル。

IV. 任意ノ集合 m ニ對シテ次ノ條件ヲ滿足スル集合 M ガ少クトモ一ツハ存在スル。

i) $m \in M$,

ii) $a \in M$ ナラバ

イ) *Potenzmenge* $\mathfrak{U}a \in M$,

ロ) *Vereinigungsmenge* $\mathfrak{V}a \in M$,

ハ) *Aussonderungsmenge* $a_{\mathfrak{A}(x)} \in M$,

$\Rightarrow$ Ersetzungsmenge $\mathfrak{M}(f(x);x\in a)\in M$.

結局IVハZermeloノMengenbereichト同ジヤウナモノが更ニMengeトシテ含マレルBereichヲ規定スル作用ヲスルワケデス。

ソコデIVニ於ケル性質ヲ有スル一ツノMヲ考ヘル、集合xヲMノ任意ノ元トシxニ對スルAnfangszahlヲω_ξトスル：$|x|=|\omega_\xi|$.（$|x|$ハ集合xノ計量数、又順序數ヲHessenberg−v. Neumannニ從ツテSubsumtionニヨツテ定義シテ置ク、即チ

$0,\ 1=\{0\},\ 2=\{0,1\},\cdots\cdots\omega=\{0,1,2,\cdots\cdots\}\cdots\cdots$

從ツテ順序数αヨリ小サイ順序数ノ集合$W_\alpha=\alpha$デアル）、カウシテMノ任意ノ元xニ順序数$\omega_\xi=\varphi(x)$ヲ對應サセレバErsetzungsaxiomニヨツテ集合

$$N=\mathfrak{M}(\varphi(x);x\in M)$$

が得ラレル．Mニハ最大ノMächtigkeitノ集合がナイカラ（IV., ii), イ)）Nニモ最大數がナイ、ソコデ

$$(1)\quad \lim_{\xi\in N}\xi=\pi$$

トスル、然ラバπハAnfangszahlノ極限トシテ矢張リAnfangszahlデアル、而モπハexorbitantデアル、如何ニモ始メニハπが$\rho<\pi$トkonfinalデアッタトスルト

$$(2)\quad \lim_{\nu<\rho}\alpha_\nu=\pi$$

ナル數列 α_ν, $\nu<\rho$, ガ存在スル。ソシテ $\alpha_\nu<\pi$ デアルカラ α_ν ハ M ニ屬ス（ソレハ $\alpha_\nu<\pi$ ナラ (1) ニヨッテ $\alpha_\nu<\xi<\pi$, $\xi\in N$ ナル ξ ガアリ、且ツ N ノ元ハソノ定義ト IV, ii), ニ) ニヨッテ M ノ元、從ッテ ξ ノ截片 α_ν ハ IV, ii), ハ) ニヨッテ M ノ元デアル）。同様ニ $\rho<\pi$ カラ $\rho\in M$、從ッテ IV, ii), ニ) ニヨッテ

$$A=\mathfrak{M}(\alpha_\nu;\ \nu\in\rho)$$

ガ，從ッテ IV, ii), ロ) ニヨッテ γA ガ M ニ屬ス、然ルニ (2) ニヨッテ

$$\gamma A=\pi$$

故ニ π ガ M ニ屬ス、從ッテ N ニ屬ス。併シソレハ (1) ニ反スル、故ニ π ハ *regulär* デアル。第二ニハ $\pi=\omega_{\alpha+1}$ トスレバ $\omega_\alpha<\pi$ デアルカラ ω_α ガ，從ッテ $\mathfrak{U}\omega_\alpha$ ガ M ニ屬ス、ソシテ

$$|\mathfrak{U}\omega_\alpha|>|\omega_\alpha|,$$
$$|\mathfrak{U}\omega_\alpha|\geqq|\omega_{\alpha+1}|=|\pi|$$

從ッテ π ガ N ニ屬スコトニナリ (1) ニ反スル，故ニ π ハ *Limeszahlindex* ヲ持ッタ *Anfangszahl* デアル。

Exorbitante Zahl ガ少クトモ一ツ存在スルコトヲ要求スルノナラ IV ニ於テ「任意ノ集合 m ニ對シテ」ハ不要ナワケデス、實ハ凡テノ *excorbitante Zahl* ヲ元トスル集合ガ存在シナイ程非常ニ多クノ *excorbitante*

Zahl が存在シテモライタイノデ「任意ノ------」ヲツケタ次第デス、ソレハ IV. ニ於テ任意ノ順序数 α ヲ m ニトレバ，α ニ對スル M ニ對應スル Anfangszahl π ハ α ヨリ大キクナリ、從ッテ如何程デモ大キイ excorbitante Zahl が存在スルコトニナリマス。從ッテ凡テノ excorbitante Zahl ノ「集合」ハ「発散」シテ集合デハアリ得ナイコトニナリマス。

以上ハ大体ノ考デ大ザッパデスが，公理カラ精密ニ當ッテ見テ意外ナ困難ニ遭遇スルコトがナケレバ excorbitante Zahl が Mengenbereich ニ這入ッテ來ルダラウト思ヒマス。但シ IV. ハ多スギルコトヲ假定シテヰルカモ知レマセンシ又 IV ハ他ノ公理ト非常ニ趣ヲ異ニシテヰルノデソノ点モ問題カモ知レマセン。集合ヲ無暗ニ廣クスルト例ノ矛盾が起リマスが IV ニヨッテ擴ゲテモ大丈夫ダト考ヘマス。

本會192. Wohlordnungssatz ノ一証明ニ於テ $\alpha(0)=0$ ト置キマシタが $\alpha(0)=\alpha(m)$ ト置イタ方が遙ニ natural デシタ。サウスレバ $f(\xi)$ が m ノ元デアルコトニ、サウ神経質ニナラズニスンダノデシタ、又集合 $m-n$ ハ m ニ属シテ n ニ属サヌ元ノ集合デスが 192 デハ必ズシモ $m \geqq n$ デハナイノデソノ点モ好都合ニナリマス。