197. 函數方程式 $f(f(x))=F(x)$ ニ就テ

南雲道夫（阪大）

“$F(x)$ ヲ既知函數，$f(x)$ ヲ未知函數トシテ函數方程式

$$f(f(x))=F(x),\qquad f(f(f(x)))=F(x),$$ 等々ノ一般解ヲ求ム” トイフ問題ハ $F(x)$ ヤ $f(x)$ ニ關スル假定ノ如何ニヨッテ非常ニムツカシイ問題ニ思ハレル。

次ニ實變數ノ場合ニツイテ，$F(x)$ ガ $a\leqq x\leqq b$ デ連續，純單調增加且ツ

$$F(a)=a,\quad F(b)=b$$

（$a=-\infty$，又 $b=+\infty$ デモヨイ）ト假定スル。此ノ假定ノ下ニ $a\leqq x\leqq b$ ニ於テ純單調增加連續デ $f(a)=a$，$f(b)=b$ ナル $f(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

I. $F(x)$ ニ關スル上ノ假定ニヨリ $x'=F(x)$ ナル變換 $x\longleftrightarrow x'$ ハ區間 $a\leqq x\leqq b$ ヲバ自分自身ヘ一對一且ツ連續ニ寫像スル．$x'=f(x)$ ナル變換モ同様デアル。

今區間 (a,b) 內デ特ニ寫像 $x'=F(x)$ ノ不動点［$x=f(x)$ ナル点］ノ全体ヲ除ケバ、有限個乃至可附番個ノ區間ガ殘ル。ソノ任意ノ一ツヲ (α,β) トスレバ，(α,β) ハ $x'=F(x)$ ニヨッテ (α,β) 自身ニ一對一連續ニ寫像サレ，且ツ不動点ヲ含マナイ。

區間 (α,β) ヲソレ自身ニ一對一連續デ且ツ不動点ヲ含

マヌ寫像ハ直線全体ノ上ノ点ノ Translation（移動）ト Topologisch isomorph（位相幾何學的ニ同型）デアル。即チ次ノ函數方程式

$$\boxed{\varphi(t+1)=F(\varphi(t))}$$

ガ $(-\infty, \infty)$ ニ於テ純單調増加連続函數 $x=\varphi(t)$

$$\left[\lim_{t=-\infty}\varphi(t)=\alpha,\quad \lim_{t=+\infty}\varphi(t)=\beta\right]$$ ヲ解トシテ

有スル［$x=\varphi(t)$ ハ全直線 $(-\infty, +\infty)$ ヲ區間 (α, β) ニ寫像スル］

何トナレバ x_0 ヲ (α, β) 内ノ任意ノ一点トシ

$$F(x_{n-1})=x_n$$

ニヨリ順次ニ x_1, x_2, x_3, --------- ヲ，又逆ニ x_{-1}, x_{-2}, ---------- ヲ順次ニ定義スレバ（$F(x)>x$ ト假定スレバ）

$$\alpha<x_{n-1}<x_n<\beta$$

ヲ得ル。（$F(x)$ ノ純單調性ニヨル）

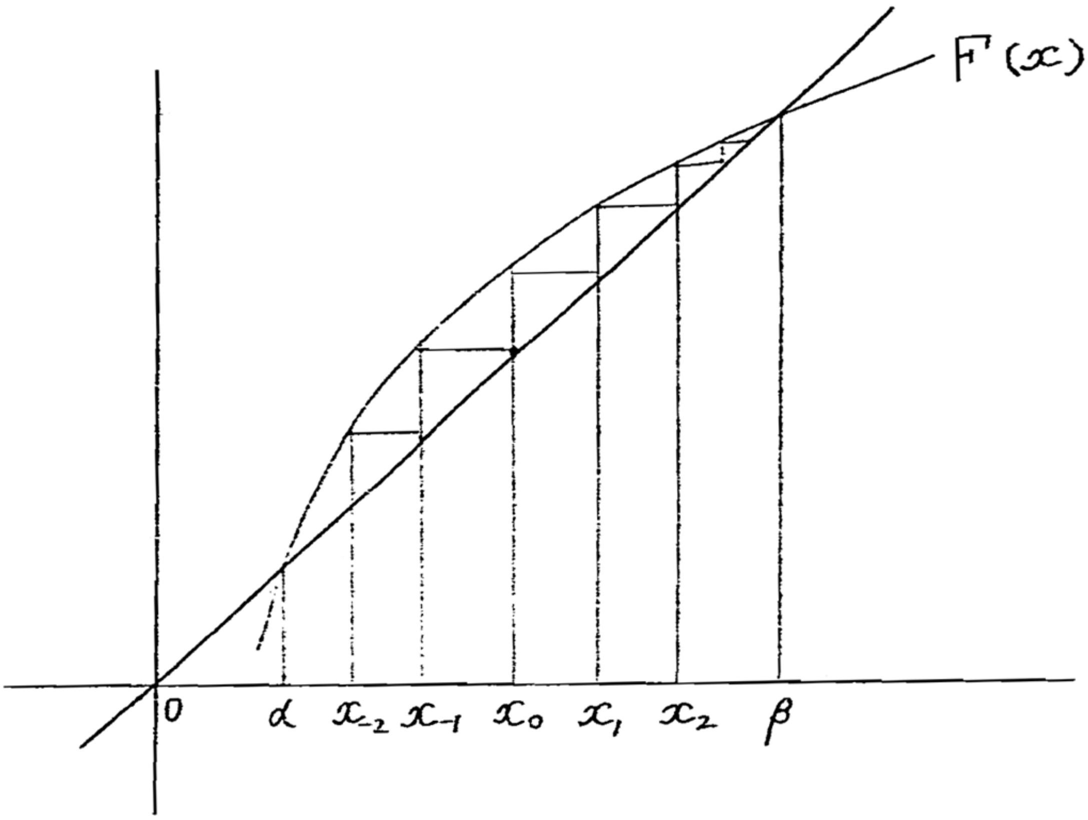
ソレカラ閉區間 $[x_{n-1}, x_n]$ ハ寫像 $x'=F(x)$ ニヨリ、丁度隣リノ區間 $[x_n, x_{n+1}]$ ニ一對一連続ニ寫像サレル。

今 $\varphi(t)$ ヲバ

$$\varphi(0)=x_0$$

$$\varphi(1)=x_1$$

トシ，$0\leqq t\leqq 1$ デ純單調増加連続函数（但シ任意）トスレバ



$$\varphi(t+1)=F(\varphi(t))$$

ニヨリ、順次ニ $1\leqq t\leqq 2,\ 2\leqq t\leqq 3,$ ------------,

$n-1\leqq t\leqq n$ ニ於ケル $\varphi(t)$ ガ自然ニ一義的ニ決定サレ

ル。($-1\leqq t\leqq 0,\ -2\leqq t\leqq -1,$ --------- モ同様) カクシ

テ得ラレタ $\varphi(t)$ ハ求ムル性質ヲ具ヘテヰル。

II. サテ $f(x)$ ヲバ (α,β) ニ於テ ($F(x)\neq x$ ナル所)

$$f(x)=\varphi\left(\varphi^{-1}(x)+\frac{1}{k}\right)$$

(k ハ自然数) トシ、$F(x)=x$ ナル点デハ

$$f(x)=x$$

ト定義スレバ、$f(x)$ ハ $a\leqq x\leqq b$ デ純単調増加連続デ

$$f(a)=a,\quad f(b)=b$$

且ツ

$$\underbrace{f(f(\cdots\cdots(f}_{k\text{回}}(x))\cdots\cdots))=F(x)$$

トナル $\left[\varphi(\varphi^{-1}(x)+1)=\mathrm{F}(x)\right.$ ＝ヨル$\left.\right]$

以上ノ形ノ解ガ問題ノ條件ノ下ニ於テ一般解ナルコトハ次ノヤウニシテワカル。

$f(x)=x'$ ナル寫像ノ不動点ハ、$f(x)=x'$ ヲ繰返シテ得ラレル $\mathrm{F}(x)=x'$ ノ不動点デアル。又 $f(x)=x'$ ノ相隣ル二ツノ不動点 α, β ノ間デハ常ニ $f(x)>x$ 又ハ $f(x)<x$ ナルニヨリ，常ニ $\mathrm{F}(x)>x$ 又ハ $\mathrm{F}(x)<x$ デナケレバナラヌ。

故ニ (α, β) ニ於テ，前ト同様ニ

$$\psi\left(t+\frac{1}{k}\right)=f(\psi(t))$$

ヲ満足スル $(-\infty, +\infty)$ デ純單調増加一意函數 $\psi(t)\left[\psi(-\infty)=\alpha,\ \psi(+\infty)=\beta\right]$ ガ得ラレル、故ニ (α, β) デ

$$f(x)=\psi\left(\psi^{-1}(x)+\frac{1}{k}\right)$$

從ッテ之ヲ k 回繰返シテ

$$\mathrm{F}(x)=\psi\left(\psi^{-1}(x)+1\right)$$

$x=\psi(t)$ トオイテ

$$\psi(t+1)=\mathrm{F}(\psi(t))$$

即チ $f(x)$ ハ與ヘラレタ條件ノ下ニ於テ一般解デアル。

以上ノ方法ノ根本ハ<u>區間ノ不動点ノナイ自己寫像ハ全直線ノ Translation ト位相幾何學的ニ同型デアル</u>トイフ考ヘニ帰スルノデアル。

上ノ方法ニヨレバ

$$f(x, \theta)=x',$$

$\left[\text{但シ } f(x,\theta)=\varphi\left(\varphi^{-1}(x)+\theta\right)\right]$, ハ θ ヲぱらめたートスル additive ナ連続群ヲ作ル。

茲デハ実変数ノ場合ノミヲ考察シタが、複素函數論的ニ考察スレバ可ナリ趣キノ異ッタ結果が得ラレル様ナ氣がスル。

——(以 上)——