192. Wohlordnungssatz ノ一証明

黒田　成勝（東京女高師）

集合論ヲ axiomatisch ニ組立テル場合ニ次ノ公理が必要デアル。

I. Fraenkel–v. Neumann ノ Ersetzungsaxiom.

mヲ既知ノ集合，φヲ既知ノ函數トスル、ソノトキ $x \in m$ ナラ $\varphi(x)$ が又集合又ハ集合ノ元デアルトスル、然ラバ凡テノ $\varphi(x)$, $x \in m$, ヲ元トスル集合が存在スル。

ソノ集合ヲ $\mathfrak{M}(\varphi(x); x \in m)$ ト記ス。

コヽデ函數ノ定義ヤ、集合論ノ他ノ公理ヲ擧ゲル必要がナイノデ、唯集合論ノ公理カラ証明サレル次ノ定理ヲ承認スルコトニシマス。

II. ξ が順序数デアルトキ、ξヨリ小サイ凡テノ順序數ヲ元トスル集合が存在スル．ソレヲ W_ξ ト記ス。

III. φヲ既知ノ函數トスル、但シφノ Argument モ，ソノ函数ノ値モ集合又ハ集合ノ元デアルトスル、ソノトキ任意ノ順序数ξニ對シテ

$$f(\xi) = \varphi\left(\mathfrak{M}(f(\eta);\ \eta \in W_\xi)\right)$$

ヲ満足スル函数 f ハ一意ニ可能デアル（函數ノ帰納的定義——v. Neumann[3]）。

IV. 凡テノ順序数ヲ元トスル集合ハ存在シナイ（Burali-Forti）.

以上ノコトカラ Zermelo ノ整列可能定理ヲ証明シマス．

勿論撰出原理ヤ集合論ノ他ノ公理ハ自由ニ使用シマス。

m ヲ任意ノ集合トスル、$\mathfrak{U}(m)$[1] ノ撰出函数ヲ $\alpha(x)$, $0\subset x\subseteq m$, トスル[2] 又 $\alpha(0)=0$ トスル。然ラバ III ニヨッテ順序数ノ領域ニ於テ函数

$$(1)\qquad f(\xi)=\alpha\big(m-\mathfrak{M}(f(\eta);\ \eta\in W_\xi)\big)$$

ガ決定サレル、ソノトキ

$$(2)\qquad \zeta<\xi,\qquad (\zeta,\xi\ \text{順序数})$$

$$(3)\qquad m-\mathfrak{M}(f(\eta);\ \eta\in W_\xi)\neq 0$$

ナラバ

$$(4)\qquad f(\zeta)\neq f(\xi),\quad f(\zeta)\in m,\quad f(\xi)\in m$$

デアル、ナゼナラ (2) ニヨッテ $\zeta\in W_\xi$. 故ニ

$$f(\zeta)\in\mathfrak{M}(f(\eta);\ \eta\in W_\xi),$$

$$(5)\qquad f(\zeta)\notin m-\mathfrak{M}(f(\eta);\ \eta\in W_\xi)$$

又 (3) ニヨッテ (1) カラ

$$(6)\qquad f(\xi)\in m-\mathfrak{M}(f(\eta);\ \eta\in W_\xi).$$

故ニ (5), (6) カラ $f(\zeta)\neq f(\xi)$ ガ得ラレル. (6) カラ $f(\xi)\in m$, 又

$$m-\mathfrak{M}(f(\eta);\eta\in W_\xi)\subset m-\mathfrak{M}(f(\eta);\eta\in W_\zeta)\neq 0$$

デアルカラ $f(\zeta)\in m$.

従ッテ今凡テノ順序数 ξ ニ対シテ (3) ガ成立シタ假定スレバ、上記 f ニヨッテ、m 或ハソノ部分集合ニ順序数ノ全体

---

1) m ノ巾集合

2) 0 ハ空集合.

ガ一對一ニ對應スルコトニナルカラ，エニヨツテ凡テノ順序数ヲ元トスル集合ガ存在スルコトニナリ、ソレハ IV. ニ反スル、故ニ (3) ヲ成立セシメナイ順序数 ξ ガアル、ソノ最小数ヲ μ トスル。

然ラバ

$$m-\mathfrak{M}(f(\eta);\ \eta\in \overline{W}_{\mu})=0$$

$$(\text{ア})\quad m=\mathfrak{M}(f(\eta);\ \eta\in \overline{W}_{\mu}).$$

ソシテ $\zeta<\mu,\ \xi<\mu;\ \zeta\neq\xi$ トスレバ μ ノ最小性ニヨツテ ξ 及ビ ζ ニ關シテ (3) ガ成立スルカラ、上記ト同様ニ $f(\zeta)\neq f(\xi)$.

從ツテ (ア) ハ m ト $\overline{W}_{\mu}$ トガ一對一ニ對應スルコトヲ示ス、ソシテ $\overline{W}_{\mu}$ ハ整列集合デアルカラ、コノ對應ニヨツテ m モ亦整列サレル。

附記： 凡テノ順序数ノ領域ガ集合デアルト考ヘルト逆理トナリ、ソレガ集合デナイト云フ定理ヲ使用スルト整列可能定理ハ上述ノヤウニ簡單ニ証明サレル、長イ間逆理デアツタ Burali-Forti ヲ使フノハ氣ガヒケルケレドモ、公理カラ出ルモノヲ使ツテ悪イ筈ハナイ、整列可能定理ト Burali-Forti トハ密接ナ関係ガアル。[4)]

Zermelo ノ両証明ハ Ersetzungsaxiom ガ集合論ニ這

3) J. V. Neumann: Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre. Math. Ann. 99. (1928)

4) 高木： 過渡期ノ数学(近刊)，集合論ト数学基礎論ノ項参照。

入ル以前ノ証明デアルガ、Ersetzungsaxiom ヲ v. Neumann[3)] ノ意味ニ於テ仮定スルノナラ、Wohlordnungssatz ノ証明ハ上記ノ如クデヨイト思ヒマス。