189. 實変數函數論ニ於ケル二三重要ナル問題ニ就テ

功力金二郎（北大）

以下述べルコトハ簡単ナニトデアルカラ論文トシテデナク鎖夏的談話トシテ読ンデ頂キタイ。

今簡単ノタメニ一次点集合（實数ノ集合）ヲ考ヘル。相素ナル（共通部分ナキ）二ツノ集合 A, B ニ對シテ相素ナル Borel 集合 E, F が存在シテ $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ ナラシメ得ルトキハ A ト B トハ互ニ Borel 集合ニヨツテ分タレル、或ハ séparable (B) デアルト言ハレル. A, B がヒドク複雑ナル集合デアルトタトヘ相素デアツテモ一般ニ séparable (B) デナイ、任意ノ集合がサタイフ複雑ナル二集合ニ分解出来ルカドウカト云フ問題ヲ N. Lusin が考ヘテ 1934年ぱりノ Comptes Rendus t. 196 第1296頁ニ次ノ定理ヲ発表シタ。

定理I. 任意ノ非可附番ナル一次点集合 E ハ（適當ニ分ケサヘスレバ）séparable (B) ナラザル二集合 E_1, E_2（$E = E_1 + E_2$; $E_1 \cdot E_2 = 0$）ニ分解サレル。

シカモ Lusin 以外ニ時ヲ同ジウシテ Novikoff モ亦同ジ結果ヲ得タト報ジテアル、サテコノ定理Iハ餘程ヨイ結果デアルヤウニ思ハレル、コノ稿デハ何故ニソンナニヨイ結果デアルカ理由ヲ示シ合セテ二，三ノ注意ヲシタイト思

フ、即チ以下詳シク述ベルヤウニ定理Iカラハ数多ノ従来難解トシテ有名ナ問題ガ綺麗ニ解決ツクノデアル。

(1) <u>*Kuratowski* ノ問題</u>: *Kuratowski* ノ著書, *Topologie* I (1933) 第254頁ニ提出サレテアル問題デ、*Lebesgue* ノ *fonctions mesurable* (B) ニ関スルモノデアル。

今ソレヲ説明シヨウ。*metric space* (距離空間) R ニ於テ定義サレタ写像 $y=f(x)$ ヲ考ヘル、$f(x)$ ノ値域 R^* モヤハリ *metric space* (或ハアル *metric space* ノ一部トシテモ同ジコト) デアルトスル。写像 $y=f(x)$ ニ就イテ, 値域 R^* ニ於ケル任意ノ *Borel* 集合ノ $y=f(x)$ ニヨル原像ガヤハリ R ニ於テ *Borel* 集合デアルナラバ $y=f(x)$ ハ *mesurable* (B) ナル写像デアルト云ハレル、コヽニ *Kuratowski* ノ問題ト云フノハ R ガ完備ニシテ可分ナル場合 R^* モ亦可分ニナルカ? —— ト云フノデアル. 定理Iヲ用ヒテ R^* ガ可分ニナルコトヲ証明シヨウ。

<u>證明</u> 先ヅ R ハ完備ニシテ可分 (且ツ勿論ソノ濃度非可附番ナル場合ダケ考ヘレバヨイ) デアルカラ、ソノ高々可附番ナル部分集合ヲ除キ残リハ無理数ノ全体ノ集合 N カラ一對一デ且ツ連続ナ写像デ移ルコトガ出来ル、コノ写像ヲ $x=g(t)$, $t\in N$ トスル. ソコデ $y=f(x)=f\{g(t)\}=\varphi(t)$ ナル写像ヲ考ヘルト $g(t)$ ガ連続デアルカラ明カニ $\varphi(t)$ ハ $f(x)$ ト共ニ、ヤハリ *mesurable* B ノ写像トナル、ソノ値域ハ

R^* ノ部分集合デ R^* トノ差高々可附番シカ違ハナイカラ一般性ヲ失ハズニ R ガ即チ N デアル場合ダケヲ考ヘルコトガ出來ル。

サテ帰謬法ヲ以テ証明ショウ。R^* ガ可分 (*séparable*) デナイトスル。スルト R ハ *metric space* デアルカラ相素ナル開集合ノ族ニシテ、ソノ濃度非可附番ナルモノガ存在スル。今ソノ各開集合カラ一点ヅツヲ取リ出シテソノ和 E^* ナル集合ヲ作ルト E^* ハ孤立点ノミヨリナル、ヨッテ E^* ノ各部分ハ E^* ニ於テ閉ヂタル集合デアル。次ニ E^* ノ各点 e^* ニ對シテソノ原像 $f^{-1}(e^*)$ ヲ考ヘル。$f^{-1}(e^*)$ カラソノ任意ノ一点ヲ選ンデ e トシ、カヽル e ノ全体ヲ E トスル。E ハ N ノ部分集合デ，E^* ガ非可附番デアルカラ E モ亦非可附番デアル。スルト定理1ニヨッテ E ヲ二ツノ部分 E_1, E_2 ニワケテ、$E=E_1+E_2$, $E_1 \cdot E_2 = 0$, E_1 ト E_2 トハ *séparable* (B) デナイヤウニスルコトガ出來ル。今 $f(E_1)$ ヲ考ヘルト之ハ E^* ノ一部分デアルカラ E^* ニ於テ閉ヂタ集合デアル。即チ R^* ニ於テ閉ヂタル集合 F^* ガ存在シテ $f(E_1)=F^* \cdot E^*$ トナル。

$f(E_1) \cdot f(E_2) = 0$ デ且ツ $f(E_2) \subseteq E^*$ デアルカラ $F^* \cdot f(E_2) = 0$ トモナル。即チ F^* ノ原像 $f^{-1}(F^*)$ ハ E_1 ヲ含ンデ E_2 ト相素デアル。他方デ $f(x)$ ガ *mesurable* (B) デアルカラ $f^{-1}(F^*)$ ハ N ニ於ケル *Borel* 集合デアル。N ハ G_δ 集合デアルカラ $f^{-1}(F^*)$ ハ一次元集合トシテ

Borel 集合デアル。即チ E_1 ト E_2 トガ Borel 集合 $f^{-1}(F^*)$ ト $Cf^{-1}(F^*)$ ニヨツテ分タレタコトニナリ，是レ不合理デアル。 Q.E.D.

(2) <u>Hausdorff ノ問題</u> Fundamenta Mathematicae t. XX (1933) 第286頁ニ問題(58)トシテ提出サレテヰルモノデアル。先ヅ Hausdorff ガ提出シタ通リニ問題ヲ述ベテ見ヨウ。 問題：濃度 $\aleph_1$ ナル集合Eガアルトキソノ可附番個ノ部分集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$ ヲ適當ニ與ヘテEノ凡テノ部分集合 X ヲ $X = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_{p_n}$ ナル形ニ表ハスコトガ出來ルカ？ 但シコヽニ p_n ハ自然数ノ部分列（同ジ数ヲ繰リ返ヘスコトモ許ス），$\overline{\lim}$ ハ Borel ノ意味ノ ensemble limite complet（最大極限集合）ヲ意味スル。（上述ノ性質ヲ有スル $\{A_n\}$ ノ存在シナイコトヲ Kontinuum hypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ヲ用ヒズニ証明スルコトヲ要求スル）。—— ト云フノデアル。尚ホ Sierpinski 著 "Hypothèse du continu" (1934) 第91頁參照。

サテ吾々ハコヽデ Kontinuum hypohese ヲ用ヒズ、定理Iカラコノ証明ヲ與ヘヨウ。

<u>証明</u> Eヲ與ヘラレタル集合デ、ソノ濃度 $\aleph_1$ トシ今 E_1 ノ部分集合ノ列 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots, A_n \cdots\cdots$ ガ任意ニ與ヘラレテヰルトスル。ソコデ $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} A_{n_\nu}$ ナル形ニ表ハサレナイEノ部分集合 X ヲ求メテ見ヨウ。Eノ各要素 $x = x \in A_n$ ヲ

ミタスnダケヲ、ソノ大イサノ順ニ並ベテ書クコトニスル。スルト$(n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots, n_K, \cdots\cdots)$ $n_K < n_{K+1}$ナル自然数ノ無限列ヲ得ルカ又ハアル所カラ先ニ含マレナイタメニ$(n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K)$ $n_i < n_{i+1}$, $i=1, 2, \cdots\cdots, K-1$ナル有限列ヲ得ルカ或ハ全クカヽル$n_K$ガ存在シナイカデアル。最後ノ場合ニハ$x$ハ$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ニ含マレナイカラ$X=(x)$, 即チ$x$ダケヲ集合ト見ルト之ハ明カニ$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} A_{n_\nu}$ナル形ニ表ハシ得ナイ。カヽル$x$ノ存在スル場合ニハ証明ハ既ニスンダコトニナル。ヨツテ以後コノ第三ノ場合ハ起ラナイコトニシテ議論ヲ進メヨウ。第二ノ場合ニハ$(n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots, n_K, n_{K+1}, \cdots\cdots)$ $n_1 < n_2 < \cdots\cdots < n_K = n_{K+1} = n_{K+2} = \cdots\cdots$ヲ以テ示スコトニスル。スルト如何ナル場合ニモ$x \in E$ナル$x$ニ對シテ$(n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots, n_K, \cdots\cdots)$ナル自然数. 單調増加列ガ對應シテソコニ現ハレタルn_Kニ就テハ常ニ$x \in A_{n_K}$デソコニ現ハレザルn'_Kニ就テハイヅレモ$x \overline{\in} A_{n'_K}$デアル。

サテ次ニ相異レル二要素x及ビyニ同ジ$(n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K, \cdots\cdots)$ガ對應サレル場合ガアル。ソノトキソノ一方$x$ヲ含ミ他$y$ヲ含マナイ$E$ノ任意ノ部分集合ヲ$X$トオクトカヽル$X$ハ明カニ

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} A_{n_\nu} = (A_{n_1} + A_{n_2} + A_{n_3} + \cdots\cdots)(A_{n_1} + A_{n_2} + \cdots\cdots)(A_{n_3} + \cdots\cdots)$$

$\cdots\cdots$トシテ表ハシ得ナイ、カヽルx, yノ存在スルトキハ

証明ハ既ニスンダコトトナル。ヨツテ以後相異ナルx, yニハ相異ナル系列($n_1, n_2, \cdots\cdots n_k, \cdots\cdots$)ガ對應サレルコトトシテ議論ヲ進メヨウ。

サテ今度ハコノ自然数ノ系列($n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k, \cdots\cdots$)ヲ$0<t<1$ナル無理数ノ連分数展開トシテ考ヘヨウ。$0<t<1$ナル無理数ノ全体ヲNヲ以テ示ス。カクテ$x \in E$ナル凡テノ$x$ニ無理数ガ對應スルコトニナル。而モコノ對應ハEノ全体トNノ一部分E^*トノ一對一對應ニナル。ソコデコノ對應ニヨツテA_nハドコヘ移サレルカヲ見ヨウ。Nニ属スル無理数ノ中ソノ連分数展開ガ$n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K$カラ始マル数ノ全体ヲ$N_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$ヲ以テ示ス。今$A_n$ニ對應スル無理数ノ全体ヲ$A_n^*$トスレバ$A_n^*$ハ($n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K, \cdots\cdots$)ノドコカニ$n$ガ現ハレルヤウナ無理数デ而モカゝル$n$ハ$K=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ノ間ニ現ハレナケレバ絶對ニ現ハレナイカラ

$$A_n^* = E^* \cdot \Big(N_n + \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,n} + \sum_{i<j<n} N_{i,j,n} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_t<n} N_{i_1, i_2, \cdots\cdots, i_t, n} + \cdots\cdots + N_{1,2,3,\cdots\cdots,n} \Big)$$

トナル. $N_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$ハNニ於ケル*interval*(開區間)デ、上ノ右辺ノ括弧内ハソノ有限個ノ和デアルカラ、之レハNニ於ケル開集合デアル。即チA_n^*ハE^*ニ於ケル開集合デアル.
ヨツテ$\overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} A_{n_\nu} = (A_{n_1}^* + A_{n_2}^* + \cdots\cdots)(A_{n_2}^* + \cdots\cdots) \cdots\cdots$ヲ以テ表ハサレル集合ハ凡テ$E^*$ニ於ケル$G_\delta$集合デアル。

サテマタ他方デ *Hausdorff* ノ問題ハ問題ノ性質上一對一對應ニヨッテ不変デアル。E ト E^* トノ間ノ一對一對應ニヨリ A_n ガ A_n^* ニ移ル以上, E^* ノ部分集合ニシテ $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} A_{n_\nu}^*$ ヲ以テ表ハサレナイモノヲ求メレバ充分デアル。即チ E^* ニ於ケル G_δ ナラザル E^* ノ部分集合 X^* ヲ求メレバ充分デアル。E ノ濃度ガ $\aleph_1$ デアルカラ E^* ノ濃度モ亦同ジデ非可附番デアル。ヨッテ定理1カラ E^* ヲニッニ分解シテ $E^*=E_1^*+E_2^*$, $E_1^*\cdot E_2^*=0$ トシ E_1^* ト E_2^* ヲ互ニ *séparable* (B) デナクスルコトガ出來ル。$E_1^*=X^*$ トオケバ之ガ吾々ノ求メル集合デアル。何トナレバ若シ E_1^* ガ E^* ニ於テ G_δ 集合デアルトスレバ一次点集合ナル G_δ 集合 G ガ存在シテ $E_1^*=E^*\cdot G$ トナル。$E_1^*\cdot E_2^*=0$, $E_2^*\subseteq E^*$ カラ, シタガッテ $GE_2^*=0$。ヨッテ $E_1^*\subseteq G$; $E_2^*\subseteq CG$ トナリ E_1^*, E_2^* ハ *Borel* 集合 G 及ビ CG ニヨッテ分タレルコトトナッテ不合理デアル。E_1^* ハ E^* ニ於テ G_δ 集合デナク, 全ク吾々ノ求メル集合デアル。カクテ *Hausdorff* ノ要求スル証明ハ全ク完了シタ。
序ニモウ一ッ面白イ結果ヲ擧ゲヨウ。

(3) 1914年解析集合論ノ誕生ニ先駆ケテ *Baire* ノ性質ヲ有シテ *Baire* ノ函数ニ非ル函数ヲ作ルタメニ, N. *Lusin* ハ, *Kontinuum hypothese* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ヲ用ヒテ, 任意ノ疎ナル一次点集合ト高々可附番個ノ点シカ共有シナイ一次点集合ヲ定義シ, 1924年ニハ W. *Sierpinski* ハマタハリ $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ナル假定ノ下ニ上ト *dual* ニ當ル性質

——即チ任意ノ *Lebesgue* ノ意味デ *measure* 0 ナル一次点集合ト高々可附番個ノ点シカ共有シナイト云フ性質——ヲ有スル一次点集合ヲ定義シタコトハ歴史的ニ有名デアルカラ誰デモ御存ジノコトデアラウ。*Sierpinski* ハコノ後ノ性質ヲ S ト名ヅケテヰル。サテ E. *Szpilrajn* ガ *Fundamenta Mathematicae* t. XV. デ示シタヤウニ容易ニ、一次点集合 E ガ性質 S ヲ有スルトキ任意ノ *Lebesgue* ノ意味デ *measurable* ナ一次点集合 M ニツキ $M\cdot E$ ハ E ニ於テ F_σ 集合トナルコトガワカル。実際 M ヲ *measurable* ナル集合デアルトスルト、ソノ等測核 Q ヲ用ヒテ $M=Q+N$, Q ハ F_σ 集合, N ハ *measure* 0 ノ集合ト云フヤウニ表ハサレル。（吉田洋一氏：実変数函数論（岩波講座，数学）第 160 頁参照）。ヨッテ $ME=QE+NE=QE+NE\cdot E=(Q+NE)\cdot E$ デアル。然ルニ E ガ性質 S ヲ有シ N ガ *measure* 0 デアルカラ $N\cdot E$ ハ高々可附番ナル集合，即チ F_σ 集合デ、従ッテ $Q+NE$ ガ F_σ 集合トナリ $(Q+NE)\cdot E$ 即チ $M\cdot E$ ハ E ニ於ケル F_σ 集合デアル。 Q. E. D.

コノ性質——ソコニ於ケル *measurable* ノ集合ガ凡テソコニ於ケル F_σ 集合デアル——ヲ性質 σ^* ト名ヅケヨウ。性質 σ^* ハソレダケヲ研究シテモ面白イ．（例ヘバ *Kuratowski*: *Topologie* I. 第 272 頁 σ 空間ノ項参照．σ 空間ト性質 σ^* トハ全ク同ジデハナイガ）。サテコゝデハ (3) トシテ上ト逆ノ問題ヲ考ヘテ見ヨウ。即チソコニ於ケル

measurable ノ集合ガ凡テソコニ於ケル F_σ 集合デアルナラバ実ハコノ一次点集合ハSナル性質ヲ有スルコトヲ定理Iカラ証明シヨウ。サウスレバ上ノ *Szpilrajn* ノ証明ト合セテ性質Sトσ^*トガ全然一致スルコトガ（*Kontinuum hypothese* 無シニ）得ラレタコトニナル。

証明　一次点集合Eト任意ノ可測集合Mトノ共通部分MEガEニ於ケルF_σ集合デアルトシ、Nヲ測度0ナル任意ノ集合トスル。$N \cdot E$ガ高々可附番デアルコトヲ示サウ。NEガ若シ可附番デナケレバ定理IニヨッテNEヲ$NE = E_1 + E_2$; $E_1 \cdot E_2 = 0$ ノ如ク分解シテE_1トE_2トヲ互ニ *séparable* (B) デナクスルコトガ出来ル。然ルニ$E_1 \subseteq N$デアルカラE_1モ測度0デ従ッテ可測デアル。ヨッテ仮定カラE_1ハEニ於ケルF_σ集合デアル。即チF_σ集合ナル一次点集合Aガ存在シテ$E_1 = A \cdot E$トナル。$E_1 \cdot E_2 = 0$デ$E_2 \subseteq E$デアルカラ$A \cdot E_2 = 0$ 或ハ$CA \supseteq E_2$。AガF_σ集合デアルカラCAモ *Borel* 集合デ、E_1トE_2トガ *Borel* 集合AトCAトニヨッテ分タレル。コレ不合理デアル。　Q.E.D.

以上デ定理Iガ如何ニ良イ結果デアルカヲ示スコトガ出来タカラ今度ハ定理Iソノモノニ就イテ少シク考ヘテ見ヨウ。コノ定理Iヲ発表シテカラ約一ケ月ノ後 *Lusin* ハ同ジクぱりノ *Comptes Rendus* t. 198. 第1671頁ニ定理Iノ特別ナル場合――集合Eガ測度0ナル集合デナイ場合、或ハ集合Eガ *toujours de première catégorie* デナイ

場合——ニ對スル別証明ヲ詳シク發表シタ。ソシテ上記定理Iノ前論文ニ於ケル証明ニ就テハ

Une observation nous a montré que la chaîne de nos déductions ne peut pas être regardée comme tout à fait complète.

ト断リ書キシテアル。ソコデ上記(1),(2),(3)ノ各証明ヲ調ベテ見ルト、ソコニ出テ來ル定理Iノ集合Eニ當ル集合ハ困ツタコトニ同時ニ測度0デ且ツ *toujours de première catégorie* デアルカモ知レヌ。定理Iヲコノヤウナ特別ナ場合ダケニ訂正サレテハ"*Cas importants*"ニハ相違ナイトシテモ懸隔甚ダシイモノガアルヤウデアル。少クトモ吾々ノ場合ニハ孰レモソノマヽデハ役ニ立タナイノデアル。

ソコデ定理Iノ代用ニナル定理ヲ探シテ見ヨウ。先ヅ上記C.R.第1296頁ニアル定理Iノ証明ヲ逐次的ニ檢査シテ見ルト、カナリ詳シク述ベテアツテドコニモ誤リガナイヤウデアル。*chaîne des déductions* ハコノ部分ノミ関スル限リニ於テハ至極完全ノヤウニ思ハレル。只途中デ一ケ所 *Lusin* ガヨリ前ニ發表シタ次ノ定理IIヲ用ヒテアル。

定理II. 平面上ニ於ケル *Borel* 集合Aトソノ補集合CAトハ互ニ *enchevêtrés* デハナイ。（但シココニ平面上ニ於ケル二ツノ集合A及$\mathfrak{A}$ガ互ニ *enchevêtrés* デアルトハ——平面上ノ点ヲ(x,y)デ示ストシテ、y軸上ニ適當ニトリサヘスレバ非可附番集合Hガ存在シテHヲ如何ニ$H=H_1+H_2$, $H_1 \cdot H_2=0$ト云フ風ニ分ケテモソレニ對シテ$x=x_0$直線$x=x_0$ト

集合A, $\mathfrak{A}$ トノ交ハリ(ノy軸ヘノ影響)ヲ夫々A_0, $\mathfrak{A}_0$トスルトキ $H_1 \subseteq A_0$, $H_2 \subseteq \mathfrak{A}_0$ トナル。——コトデアル。

定理IIカラ定理Iヲ出シタ N. Lusin ノ証明(C.R. t. 196 第1297頁ニアル)ヲ念ノタメコヽデ述ベテ見ヨウ。ソコニ誤リガアルカドウカ御注意アリタイ。

証明。 與ヘラレタル濃度非可附番ノ集合ヲEトスル。Eノ濃度非可附番ヲ有スル任意ノ部分集合ニツキ定理ヲ証明スレバ同時ニマタEニ就イテハ尚更成立スルカラ一般性ヲ失ハズニ最初カラEノ濃度ハ$\aleph_1$デアルト假定スルコトガ出来ル。サテ$\aleph_1^2 = \aleph_1$デアルカラ與ヘラレタルEヲ$\aleph_1$個ノ互ニ相素ナル且ツ濃度$\aleph_1$ヲ有スル集合ニ分解スル。之等ノ集合ハ$\aleph_1$個アルカラ Cantor ノ第一級及ビ第二級ノ順序数ヲ添数ニ用ヒテ $E_0, E_1, E_2, \cdots\cdots, E_\omega, \cdots\cdots, E_\alpha, \cdots\cdots$ $0 \leq \alpha < \Omega$ ト云フ風ニ表ハスコトガ出来ル。ソコデE_αニ對シテ平面上ニ第α級 Borel 集合(一次点集合トシテノ)ニ対スル萬有 Borel 集合(即チ高々α級ナル任意ノ Borel 集合Mニ対シテ適当ニ$x = x_0$ヲ選ビ、y軸ニ平行ナ直線$x = x_0$デ切ルト、ソノ切口ガ丁度ソノ集合Mニナルヤウナ平面上ノ Borel 集合)ヲ對應セシメ之レヲH_αト名ヅケヨウ。(カヽル集合ノ存在ニツイテハ、例ヘバ H. Hahn: Relle Funktionen, erster Teil (1932), 第273頁 33. 8. 31 参照)

サテ定理IIニヨルトH_αトソノ補集合CH_αトハ互ニ

enchevêtrés デナイカラ E_α ヲ適當ニ二ツニワケテ $E_\alpha = E_\alpha' + E_\alpha''$; $E_\alpha' \cdot E_\alpha'' = 0$ トシ如何ナル $x = x_0$ ヲトツテモ H_α ト CH_α トノ切口ガ E_α', E_α'' ヲ分ケナイヤウニ E_α', E_α'' ヲ選ブコトガ出來ル。H_α ハ直線上ノ α 級 *Borel* 集合ニ對スル篩有集合デアルカラ E_α', E_α'' ハ高々 α 級ノ *Borel* 集合ニヨツテハ分タレナイ。

サテ $E' = \sum_{0 \leq \alpha < \Omega} E_\alpha'$; $E'' = \sum_{0 \leq \alpha < \Omega} E_\alpha''$ トスルト E_α ガ互ニ素デアルカラ E' 及ビ E'' モ互ニ素デ，マタ E_α ノ和ガ E デアルカラ $E' + E'' = E$ デアル。最後ニ E', E'' ハ決シテ *séparable* (B) デナイ。何トナレバ若シ相素ナル *Borel* 集合 A, B ガ存在シテ $E' \subseteq A$, $E'' \subseteq B$ デアルトスルト、A, B ハ *Borel* 集合デアルカラ $0 \leq \alpha < \Omega$ ナル或ル α ニ對シテ A, B ハ高々 α 級ノ *Borel* 集合デナケテハナラヌ。スルト E', E'' ノ部分集合タル E_α', E_α'' モ亦高々 α 級ノ *Borel* 集合 A, B デ分タレルコトニナリ、是レ不合理デアル。即チ E', E'' ハ吾々ノ求メル分解デアル。　　Q. E. D.

コノヤウニシテ見ルトヤハリ定理IIガ問題ニナルヤウデアル。シカモ上記 (1), (2), (3) ノ証明ニハ定理Iハ必要ナク定理IIダケアレバ明カニ足リルノデアル。*Lusin* ノコノ定理IIハヤハリぱりノ *Comptes Rendus* t. 198. 第1118頁ニ掲ゲラレテアル、ソシテソコニハ、*Fermat* 流歸納法 (*méthode de descente indéfinie*) ヲ集合論内

ニ將來シテソノ應用トシテ得ラレルト云フノミデ詳シイ証明ハ與ヘテナイ。

——後記。以上デ小生ノ話ハ終リデアリマスが上記ノ外ニ定理I又ハIIノ應用ハ廣イコトト思ハレマス。ソレ故ニ小生ハ定理IIノ証明が欲シイノデアリマス。C.R.t. 198 第1118頁ニアル説明ダケデハ簡ニ過ギテ満足デアルトハ云ハレマセン。Lusin ノ手許ニハドウイフ風ニヤツテアルデセウカ?(非常ニ優レタル数學者デアルカラ少クトモ満足ニ近イモノハ出來テヰルデセウが)。之等ノ論文が出テ日尚淺イノデスカラ、ソノ後ドコカデ発表サレテヰルノニ小生がマダ氣がツカナイノカモ知レマセン。サウイフ論文ヲ御存ジノ方、又ハ上記定理IIノ証明ノ出來タ方ニハ是非御教示願ヒタイノデアリマス。

——以上——