180. Picard-Vessiot ノ理論ニ就テ

吉田 耕作 (阪大)

Picard (Traité 3) 及ビ Vessiot (École Norm. 3 série, tome 9) ニ依ツテ組立テラレタ所謂線形微分方程式ノ Galois ノ理論ノ essential ナ部分ヲ幾分 modern ニ取扱ツテミタイト思ヒマス。

思ヒ違ヒヲシテル所モ澤山アリマセウシ又文献ニ暗イコトデスカラ御教示ヲ御願ヒスル次第デス。

Def. 1. 領域Dデ定義サレタ有理型函数 $a(x)$ ノ集合Rガ次ノ條件ヲ満足スルトキニ之レヲ（Dデ定義サレタ）Körper ト呼ブ。

i) $a \in R$ ナラ $a' \in R$ （a' ハ a ノ微係数）

ii) $a, b \in R$ ナラ $a \pm b,\ ab,\ \frac{1}{a} (a \neq 0) \in R$

iii) 全テノ有理函数 $\in R$

Def. 2. R ノ element ヲ係数トスル微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + p_n(x) = 0$$

ノ解ノ一ツノ F.S. ヲ $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ トスル。（若シ必要アラバ初メカラ D ノ Teilbereich D′ ヲ D ノ代リニト

ツテヲクコトニヨリ、コノ F.S. ハDデ有理型トスル）y及ビ其ノ任意ノ order ノ微係数並ビニRノ element ノ有理函数ハDデ有理型デアル。斯ル全テノ有理型函数ノ集合 $R(y)$ ハ def. 1. ニ於ケル i), ii), iii) ヲ満足スル。$R(y)$ ノ element ヲ y, y', y'',-------及ビRノ element ノ有理函数トシテ表ハス仕方ハ幾通リモアリ得ル。コノコトヲ $R(y)$ ノ element ハ種々ノ expression ヲモツト呼ブコトニスル

Def. 3. $R(y)$ ノ element ヲ $R(y)$ ノ element ニ對應サセル一對一ノ對應Aガ次ノ條件ヲ満足スルトキニ之ヲ $R(y)$ ノ Automorphism ト呼ブ。

i) $a \in R$ ナラ $\quad a \longleftrightarrow a$

ii) $a \longleftrightarrow b$ ナラ $\quad a' \longleftrightarrow b'$

iii) $a \longleftrightarrow b,\ c \longleftrightarrow d$ ナラ

$$ac \longleftrightarrow bd,\quad a \pm c \longleftrightarrow b \pm d,\quad \frac{1}{a} \longleftrightarrow \frac{1}{b}.$$

Satz 1. $R(y)$ ノ Automorphism A ニハ unique ニ F.S. $y_1, \cdots\cdots, y_n$ ノ non singular linear substitution L ガ對應スル。コノLハ $a \in R$ ナル element 及ビ其全テノ order ノ微係数ヲソノ expression ノ如何ニ關ラズ invariant ニスル（之レヲ以下簡單ノタメニLガ a ヲ invariant ニスルト呼ブコトニスル）ト云フ性質ヲモツ。逆ニ斯ル性質ヲモツ non sing. l. subst. L ハ unique ニ $R(y)$ ノ一ツノ Automorphism ヲ indugieren スル。

証. $Ay_i = Y_i$, $i=1,2,\cdots\cdots,n$ ト置クトキ y_i ト共ニ Y_i モ(1)ヲ満足スルコトカラ分ル。

Satz 2. A全体ノ集合ハ group ヲ作ル。之ニ isomorph ナ L ノ group ニヨリ A全体ノ集合ニ topologie ヲ導ヘルコトが出来ル。L ノ全体ハ其ノ det. 0 ナラザル n次行列全体ノ作ル group ニ於テ閉デテヲルカラ Cartan-Neumann ノ定理ニヨリ L 全体ノ Komponent (単位変換ト連結セルモノ全体)ハ連結リい群ヲ作ル。

Def. 4. A全体ノ Komponent ナル連結リい群G ヲ R(y) ノ <u>Galois群</u>ト呼ブ。

Def. 5. R(y) ノ部分集合 $\overline{R}$ が R ヲ含ミ且ツ def. 1 ノ i), ii), iii) ヲ満足スルトキニ $\overline{R}$ ヲ R(y) ノ Unterkörper ト呼ブ。

Satz 3. $\overline{R}$ ノ任意ノ element α ニ對シテ α ヲ invariant ニスル (*Satz* 1 ニ於ケル約束参照) G ノ element ノ全体 G_α ハ G ニ於テ閉デテヲル。α ヲ $\overline{R}$ ニ於テ動カストキ得ラレル全テノ G_α ノ Durchschnitt G_∞ モ G ニ於テ閉デテヰル.
G_∞ ノ Komponent $\overline{G}$ ハ Cartan-Neumann ノ定理ニヨリ連結リい群デアル。$\overline{G}$ ハ次ノ Maximal-eigenschaft ヲ有スル。G ノ部分リい連結群 G' が $\overline{R}$ ヲ elememtwise ニ invariant ニスルナラ

$G' \leqq \overline{G}$。

Def. 6. 上ノ如クシテ Unterkörper $\overline{R}$ ニ對シテ unique ニ定マル $\overline{G}$ ヲ $\overline{G}(\overline{R})$ ト書ク。逆ニ G ニ於イテ閉ヂタ連結リい群 $\overline{G}$ ガ與ヘラレタトキ之レニヨッテ element wise ニ invariant ナ $R(y)$ ノ element ノ作ル Unterkörper $\overline{R}$ ヲ $\overline{R}(\overline{G})$ ト書ク。

Def. 7. Satz 3 ニ於テ G ノ代リニ其ノ det. 0 ナラザル n 次行列全体ノ Komponent $\overline{R}$ ノ代リニ $R(y)$ ヲトッテ議論スレバ

$$G = G(R(y)).$$

Satz. 4. G ニ isomorphe ナ L ノ群ノ element ハソノ n^2 コノ coef. ノ間ノ幾ツカノ代数的関係ニヨッテ定義サレタ或代数的集合体 M ノ点ト考ヘルコトガ出來ル。然モコノ群ノ単位変換ノ近傍ハ M ノ原点ノ近傍トー致スル。コノ意味ニ於イテ G ヲ algebraic ナ group ト呼ブ。

証. $R(y)$ 任意ノ element α ヲ其ノ一ツノ expression ニ於テトッタトキ non sing. ナ l. S. L ガコノ α ノミヲ invariant ニスルト云フ條件ヲ書イテミルト n^2 コノ coef. ノ間ノ幾ツカノ代数的関係ヲ得ル。次ニ α' ヲ L ガ invariant ニスルタメニハ新ニ幾ツカノ代関ヲ附加シナケレバナラヌカモ知レヌ。α'', α''' ニツイテモ同様。又 α ヲ他ノ expression ニ於テ考ヘタトキモ同様。

α以外ノ$R(y)$ノ element β ヲトツタトキモ同様。シカシGハ連結リい群デ其ノ dimension ハ定ツテルカラ有限ノ段階デ代数的集合体ノ dimension ガGノ dimension ニ一致スル。

Satz 4'. $\alpha \in \overline{R}$トシタトキαヲ invariant ニスル G ノ element 全体ノ Komponent ナル連結リい群ヲ $\overline{G}_\alpha$ トスレバ $\overline{G}_\alpha$ モ algebraic ナ group デアル。

Satz 5. 適當ニ $\overline{R}$ ノ element α ヲトレバ
$\overline{G}(\overline{R}) = \overline{G}_\alpha$。

証。 $\overline{G}_\alpha \supseteqq \overline{G}$ ハ明カダカラ $\overline{R}$ ノ任意ノ element β ニ對シテ $G_\alpha \subseteqq G_\beta$ ナル如キ α ノ existenz ヲ云ヘバヨイ（$\overline{G}$ ノ Maximaleigenschaft; Satz 3）。各$\overline{G}_\alpha$ハ連結リい群ダカラ其ノ dimension 有界（$\leqq n^2$）ヨッテαガ $\overline{R}$ ヲ動クトキ其ノ dimension ガ minimum デアル如キ $\overline{G}_\alpha$ ガ少クトモ一ツ存在スル。ソノ一ツ $\overline{G}_\alpha$ ヲトレバヨイ。

借モシ $\overline{G}_\alpha \neq G_\beta$ トスル。G_β ニ属サヌ G ノ一般ノ element ニヨリ $\alpha \longrightarrow \alpha'$, $\beta \rightarrow \beta'$ ($\beta' \neq \beta$) トスル。
$\dfrac{\alpha'-\alpha}{\beta'-\beta}$ ハ高々 n^2 コノ parameter ニ algebraic ニ depend スル（Satz 4, 4'）ニヨッテ $\dfrac{\alpha'-\alpha}{\beta'-\beta}$ ハ或代数的微分方程式ヲ満足スル。故ニ $\dfrac{\alpha'-\alpha}{\beta'-\beta}$ ノ形ニ書ケナイ有

理函数 r が存在スル。故ニ

$$G_{\alpha-r\beta} \subseteqq G_\beta \quad \text{従ッテ} \quad G_{\alpha-r\beta} \subseteqq G_\alpha$$

$$\therefore \quad G_{\alpha-r\beta} \subseteqq G_\alpha \cdot G_\beta$$

仮定ニヨツテ $G_\alpha \neqq G_\beta$ ダカラ $G_{\alpha-r\beta} \neqq G_\alpha$。$G_{\alpha-r\beta}$ ハ連結リい群 G_α ノ部分連結リい群ダカラ Schreier ノ基本定理Iニヨリ $\dim G_{\alpha-r\beta} < \dim G_\alpha$ デナケレバナラナイ。之ハ G_α ノエラミ方ニ反スル。

系. $\overline{G}(\overline{R})$ ハ algebraic ナ群デアル (Satz 4')

Verschärfung des Picard-Vessiotscher Satz

$\overline{G}(\overline{R})$ ハ G ニ於テ閉デタ algebraic ナ group ニシテ

$$\overline{\overline{R}}(\overline{G}(\overline{R})) = \overline{R}$$

証明. $\overline{G}(\overline{R}) = \overline{G}_\alpha$, $\alpha \in \overline{R}$ (Satz 5)。

ヨッテ $\overline{\overline{R}}$ ノ element ハ $\alpha, \alpha', \alpha''$, -------- 及ビ R ノ element ニヨリ rational ニ表ハセル。コノ証明ハ Vessiot ノ定理 (Picard P. 551) ヲ modify スレバ得ラレルト思ヒマス。

ソレが正シケレバ $\overline{R} \geqq \overline{\overline{R}}$。

一方 $\overline{\overline{R}} \geqq \overline{R}$ ハ定義カラ明カデスカラ $\overline{\overline{R}} = \overline{R}$。

Picard ノヤウニ Resolvent ヲ使ハズニヤラウト試ミタ譯デス。尚 Algebra ニ於ケル Galois ノ theory ニ於ケルが如ク之ノ dual デアル。

G ノ algebraic ナ subgroup $\overline{G}$ ニ對シ

$$\overline{\overline{G}}(\overline{R}(\overline{G}))=\overline{G}$$

ガ云ヘルト思フノデスガ未ダハッキリ出來テヲリマセンカラ出來タラ御高評ヲ乞ヒタイト思ヒマス。方針ハ大体次ノ通リ。上定理ヨリ　$\overline{\overline{R}}(\overline{\overline{G}})$ トスレバ　$\overline{\overline{R}}=\overline{R}$ ダカラ

$$\overline{G}\leqq\overline{\overline{G}},\quad \overline{G}\neq\overline{\overline{G}},\quad \overline{R}(\overline{G})=\overline{\overline{R}}(\overline{\overline{G}})$$

カラ矛盾ガ導ケレバヨイ。即チ例ヘバ $\overline{G}$ ノ invariant ニシテ $\overline{\overline{G}}$ ノ invariant デナイモノノ existenz サヘ云ヘレバヨイ。