1935

178. Period 2 ノ topologische Selbstabbildung ヲ持ツ Mannigfaltigkeit ニ就イテ

小松醇郎（阪大）

Fixpunktfrei ノ Involutorische Selbstabbildung ヲ持ツ Orientierbare Mannigfaltigkeit ハ如何カト云フ問題ガ分レバ少シ都合ガ宜シイノダガ Dimensionszahl gerade ノトキハドウシテ調ベレバヨイノカ一寸分ラナイ。但シ特別ニ Dimension 2 即チ曲面ノ場合ニハ凡ベテ少クトモ一ツノ左様ナ Abbildungsklasse ヲ持ツコト殆ンド trivial.

扨テ Dimensionszahl ungerade ノトキハ下記ノ様ニ Heegaard-Diagramm ヲ使ヘバ必ズソノ様ナ Abbildungsklasse ノ存在ガ言ハレル。

任意ノ M^{2n+1}　　　　（後ノ図参照）

ソノ Heegaard Diagramm: M_1^{2n+1}, M_2^{2n+1} $\subset R^{2n+1}$

各々ノ境界: M_1^{2n}, M_2^{2n}

ソノ topologische Abbildung φ: $\varphi(M_1^{2n}) = M_2^{2n}$

先ヅ M_1^{2n} ノ小サナ $2n$ 次元 Element E_1^{2n} (Simplex) ヲトル、M_2^{2n+1} ノ中デ $2n+1$ 次元 Element デソノ境界 S_2^{2n} ハ M_2^{2n} ト $\varphi(E_1^{2n}) = E_2^{2n}$ ノミヲ共有スルモノヲトリ出ス、ソノ Element ノ中デ M_1^{2n} ト homöomorph

ナモノ $\overline{M}_1^{2n}$ ヲトリ出シ、ソレガ S_2^{2n} ト E_2^{2n} ノミヲ共有スル様ニトル。

斯クテ $\overline{M}_1^{2n}$ デ囲マレタ内部ノ *Menge* ヲ M_1^{2n+1} ニ合セ且ツ E_1^{2n} ト E_2^{2n} トヲ合セレバ新シイ *Heegaard Diagram* トシテ

$$\overline{M}_1^{2n+1}, \qquad \overline{M}_2^{2n+1} \qquad \subset R^{2n+1}$$

各々ノ境界:

$$M_1^{2n}+\overline{M}_1^{2n}-E_1^{2n}-E_2^{2n},$$

$$M_2^{2n}+\overline{M}_2^{2n}-E_1^{2n}-E_2^{2n}$$

ソノ *topologische Abbildung* φ' ハ $M_1^{2n}-E_1^{2n}$ ニテハ

$$\varphi'(M_1^{2n}-E_1^{2n})=\varphi(M_1^{2n}-E_1^{2n})=M_2^{2n}-E_2^{2n}.$$

E_1^{2n} ノ境界 S_1^{2n-1} ダトスレバ是レハ $\overline{M}_1^{2n+1}$ ノ境界ヲ *homöomorph* ナニツノ部分 $M_1^{2n}-E_1^{2n}$ 及ビ $\overline{M}_1^{2n}-E_2^{2n}$ ニ分ケ且ツ S_1^{2n-1} ハ $\overline{M}_1^{2n+1}$ ニテ *homotop 0.*

同様ナ関係ガ $\overline{M}_2^{2n+1}$ ニテモ成立スル。

S_1^{2n-1} 及ビ S_2^{2n-1} ガ $\overline{M}_1^{2n+1}$, $\overline{M}_2^{2n+1}$ ノ中デ *homotop* ナ *Weg* ガ作ル *Element* E_1^{2n}; $S_2^{2n}-E_2^{2n}=E_2^{2n}$ ヲ考ヘル。

此処デ求メル *Selbstabbildung* f ヲ次ノヤウニ作ル.

先ヅ

$$\varphi'(S_1^{2n-1})=\varphi(S_1^{2n-1})=S_2^{2n-1}$$

デ $\varphi(x_1)=x_2, \quad x_1\in S_1^{2n-1}, \quad x_2\in S_2^{2n-1}$

トスレバ　$f(x_1)=\mathrm{Ant}.\,x_2$

即チ x_2 ノ S_2^{2n-1} デノ Antipol ヲ對應サセル。

之レデ $f(S_1^{2n-1})=S_2^{2n-1}$ デアツテ、f ト φ' トハ對應スル一致点ガナイ。

次ニ f ヲ E_1^{2n}, $E_2'^{2n}$ ニ擴張スル、E_1^{2n} ノ Centre ハ $E_2'^{2n}$ ノ Centre ニ移ル。

次ニ此ノ Abbildung ヲ拡張シテ

M_1^{2n} デ囲マレタ内部ヲ $\overline{M}_2^{2n}-E_2^{2n}+E_2'^{2n}$ デ囲マレタ内部、$\overline{M}_1^{2n}(+E_2^{2n})$ デ囲マレタ内部ヲ

$M_2^{2n}-E_2^{2n}+E_2'^{2n}$ デ囲マレタ

内部へ移ス、勿論ソノトキ境界ノ一部分 E_1^{2n}, $E_2'^{2n}$ ノ對應ハ $f(E_1^{2n})=E_2'^{2n}$ デアルヤウニスル。

是ハ夫々ノ Berandete Mannigfaltigkeit ガ homöomorph デアルカラ常ニ可能。

之デ $f(M^{2n+1})=M^{2n+1}$.

此ノ場合 Fixpunkt ノ生ズル可能性ハ

$\varphi'(\mathrm{Rd}.\,\overline{M}_1^{2n+1})$

ト $f(\mathrm{Rd}\,\overline{M}_1^{2n+1})$ ト一致点ノアルトキ。

然ルニ
$$\begin{aligned}
\varphi'(M_1^{2n}-E_1^{2n}) &= M_2^{2n}-E_2^{2n}\\
f(M_1^{2n}-E_1^{2n}) &= \overline{M}_2^{2n}-E_2^{2n}\\
\varphi'(\overline{M}_1^{2n}-E_2^{2n}) &= \overline{M}_2^{2n}-E_2^{2n}\\
f(\overline{M}_1^{2n}-E_2^{2n}) &= M_2^{2n}-E_2^{2n}
\end{aligned}$$

且ツ $(M_1^{2n}-E_1^{2n})$ ト $(\overline{M}_1^{2n}-E_2^{2n})$ トノ Durchschnitt

S_1^{2n-1} デハ f ト φ' ト一致点ガナイ。

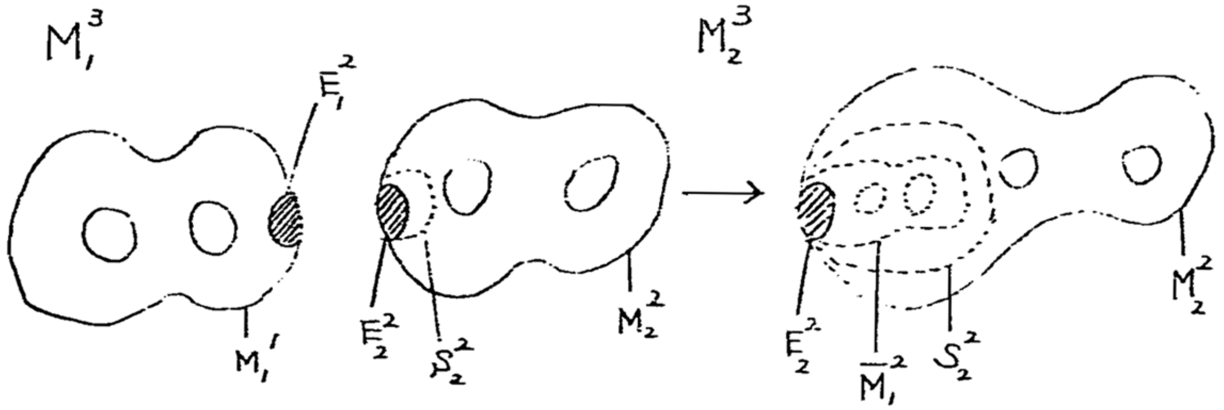
故ニ φ' ト f ト一致点ガナイ。

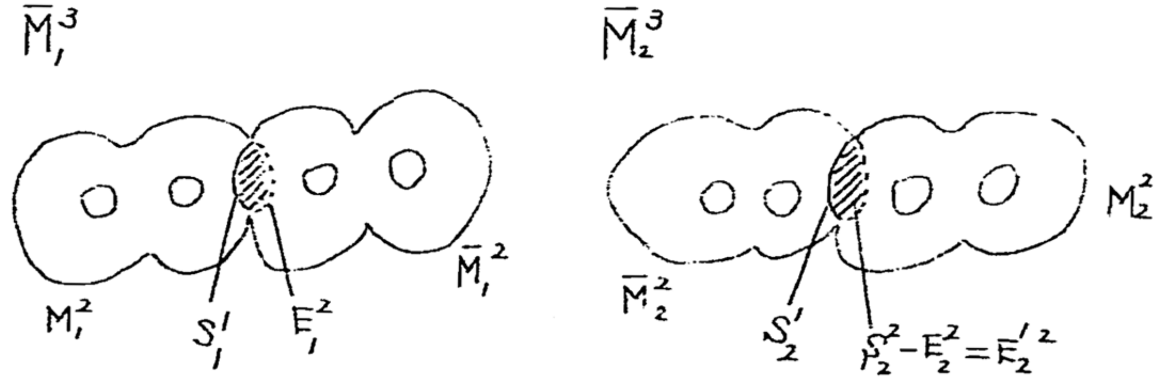
對應スル $x_1 \in \overline{M}_1^{2n+1}$, $x_2 \in \overline{M}_2^{2n+1}$

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_1$$

之デ Period 2.

此ノ Abbildung ハ Indikatrix erhaltende デアル！





Satz. 奇数次元ノ Orientierbare Mannigfaltigkeit ハ Indikatrix erhaltende, fixpunktfrei ノ involutorische Selbstabbildung ヲ持ツ。

是レガ Indikatrix umkehrende Abbildung ガ存在スルカドウカ、是レハ一般ニハ言ハレナイ、ソレハ三次元ノ unsymmetrische Mannigfaltigkeit

ハ Indikatrix ヲ変ヘル topologische Abbildung ガ存在シナイモノデアルカラ.

曲面ノ場合ニハ Indikatrix umkehrende, involutorische Selbstabbildung ハ常ニ存在スルガ Indikatrix erhaltende ノ方ハ geschlecht odd ノ奴ノミデアル、丁度三次元ノ場合ト反對ニナツテ居ル。

此ノ問題ハ Nicht orientierbare Mannigfaltigkeit ヲ調ベルトキニ生ジ、何トナレバ Nicht orientierbare Mannigfaltigkeit ノ fundamentalgruppe ハ $\mathfrak{G} + i\mathfrak{G}$ ノ如ク index 2 ノ Klasse ニ分タレ $i\mathfrak{G}$ ノ Element ニ相當スル Weg ハ Indikatrix ヲ変ヘル。

ソレデ $\mathfrak{G}$ ナル fundamentalgruppe ヲ持ツ regulär Überlagerungs-raum ヲ作レバ Blätterzahl 2 デ orientierbar.
即チ始メノ一点 x ニ對シ x_1, x_2 ノ二点ガ對應スル. 故ニ此ノ x_1 ト x_2 トヲ對應セシメル Abbildung ハ Indikatrix umkehrende, fixpunktfrei ノ involutorische Selbstabbildung デアル。

——(7. 27)——