

$$176. \quad y \frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x) = \text{就テ, II.}$$

福原 滿洲雄 (北大)

$$(a) \quad y \frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x)$$

ニ於テ $A(x), B(x)$ ハ $x \rightarrow \infty$ ノ時

$$(1) \quad \begin{cases} A(x) \sim a_{-m}x^m + a_{-m+1}x^{m-1} + \dots \\ B(x) \sim b_{-n}x^n + b_{-n+1}x^{n-1} + \dots \end{cases}$$

ナル形ニ近似的ニ展開スルモノトスル、前回 (第46号)

ニ於テハ $2m+1 < n$ ノ場合ヲ論ジ、其ノ際 *Malmquist*

ノ定理ノ擴張ニ関スルーツノ予想定理ヲ述ベタガ、 $2m+1 > n$

ノ場合ニモコノ予想ハ正シイ、以下簡單ニ今迄ニ得タ結果ヲ

述ベヨウ。

I. 先ツ $x \rightarrow \infty$ ノ時

$$y/x^p, \quad \frac{dy}{dx} / x^{p-1}$$

ガ有限ナ0デナ1値ニ収斂スルモノナ (a) ノ解ガ存在スル為

二八

$$\rho = m+1 \quad \text{又ハ} \quad n-m$$

デナケレバナラナイ。

$$(\alpha) \quad y \sim x^{m+1} \{ \alpha_0 + \alpha_1 x^{-1} + \dots + \alpha_j x^{-j} + \dots \} \quad (\alpha_0 \neq 0)$$

ガ (a) ノ形式的ニ満足スルヤウニ $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ ノキメルコ

トガ出来ル。但シ $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ハ常数,

$\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots$ ハ $p \log x + C$ (p ハ一般ニ 0 デナイ,

キマツタ常数、 C ハ任意ノ常数) ノ整多項式デアアル、而モ其

ノヤウナキメ方ハ唯一通りデアアル。又

$$(\beta) \quad y \sim x^{n-m} \{ \beta_0 + \beta_1 x^{-1} + \dots + \beta_j x^{-j} + \dots \} \quad (\beta_0 \neq 0)$$

ガ (a) ノ形式的ニ満足スルヤウニ常数 β_0, β_1, \dots ノキメ

ルコトガ出来ル、而モ其ノヤウナキメ方ハ唯一通りデアアル。

以上ハ形式的ノ計算カラ得ラレルノデアアルカラ変数ハ實數デアラウト、ナカラウト問題デハナイ、次ニ解ノ存在定理及ビ單獨性カラ導カレル結果ヲ述ベヨウ。

2. (α)ニ關シテハ $2m+1 < m$ ノ場合ト同シヤウニ次ノ結論ヲ得ル。

I. (1)ガ $x \rightarrow +\infty$ (或ハ $\Omega + 0 < \arg x < \Omega' - 0, x \rightarrow \infty$)

ノ時ニ成立スルナラバ、(α)ガ含ム任意常数 $C =$ 或値 (任意)

ヲ與ヘタトキ

$$x \rightarrow +\infty \quad (\text{或ハ} \quad \Omega + 0 < \arg x < \Omega' - 0, x \rightarrow \infty)$$

デ (α) ノ近似展開トスル (α) ノ解ハ存在シ而モ唯一ッデア

アル。

II. $\delta < |\alpha_0|$ ナラバ、 $|x_0|$ が十分大キイトキ 初期条件

$$|y(x_0) - \alpha_0 x_0^{m+1}| \leq \delta |x_0|^{m+1}$$

ヲ満足スル (a) ノ解ハ必ず (α) ナル形ニ展開サレル。

III. C ハ $x_0, y_0 (= y(x_0))$ ニ依ツテキマルカラ、C ヲ x_0, y_0 ノ函数ト見做スコトが出来ル。若シ

$$|y_0 - \alpha_0 x_0^{m+1}| < \delta |x_0|^{m+1}$$

ナラバ

$$|C| \leq 2^{m+1} \delta |x_0|^{m+1}$$

デアイル。

3. (β) ニ関シテハ多少様子が異ナル。 $x \rightarrow +\infty$ ノ時ニハ a_{-m}^2 / b_{-n} ノ實部が重要ナ役割ヲ演ズル、モット一般ニ $\arg x = \theta$ (一定) ナル直線ニ沿ツテ x が ∞ ニ近ツクナラバ

$$-\omega = \arg \left(-\frac{a_{-m}^2}{b_{-n}} \right)$$

ト置イタトキ $\cos((2m-n+1)\theta - \omega)$ ノ符号が重要ナ意味ヲ持ツ、併シ其ノ時ニハ $x = r e^{i\theta}$ ト置キ r ダケヲ変数ト考ヘレバヨイカラ $x \rightarrow +\infty$ ノ場合ダケヲ考ヘル。

IV. $R(a_{-m}^2 / b_{-n}) > 0$ ノ場合、(1) が $x \rightarrow +\infty$ ノトキ成立スルナラバ、十分大キキ正ノ數 ε ニ對シテ x_0 が十分大キケレバ

$$|y_0 - \beta_0 x_0^{n-m}| < \varepsilon x_0^{n-m}$$

+ ∞ 初期条件ヲ満足スル (a)ノ解ハ $x \rightarrow +\infty$ ノ時 (β)ナル形ニ展開サレル。 (β)ハ任意常数ヲ含マナイカラ、無限ニ多クノ解が同シ近似展開ヲ許スコトニナル。

V. $R(a_{-m}^2/b_{-n}) < 0$ ノ場合、(1)ガ $x \rightarrow +\infty$ ノ時成立スルナラバ、 $x \rightarrow +\infty$ ノ時

$$|y - \beta_0 x^{n-m}| < \varepsilon x^{n-m}$$

ヲ満足スル (a)ノ解ハ唯一ツデ、其ノ解ハ (β)ナル形ニ展開サレル。

$\cos((2m-n+1)\theta - \omega) > 0$ デアルヤウナ方向ニ開シテハ Vト、 $\cos((2m-n+1)\theta - \omega) < 0$ デアルヤウナ方向ニ開シテハ IVト同様ノ結論ガ得ラレル。

$\cos((2m-n+1)\theta - \omega) = 0$ トナルヤウナ方向ハ

$$\omega_k = \frac{\omega + (2k-1)\pi}{2(2m-n+1)} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ニ依テ與ヘラレル、此ノ方向ニハ一般ノ方法ガ利用出来ナイ。

4. 近似展開 (1)ハ

$$\Omega + 0 < \arg x < \Omega' - 0, \quad x \rightarrow \infty$$

ヲ成立シ

$$\max(\Omega, \omega_k) < \theta_0 < \min(\Omega', \omega_{k+1})$$

デアルトスル。

VI. $\arg x = \theta_0$, $x \rightarrow \infty$ ノトキ (β)ナル形ニ展開サレル (a)ノ解ニ對シテ、其ノ近似展開ハ

$$\max(\Omega, \omega_k) + 0 < \arg x < \min(\Omega', \omega_{k+1}) - 0,$$

$x \rightarrow \infty$ デ成立スル。若シ h が偶数ナラバ其ノ近似展開ハモ
ツト廣イ。

$\max(\delta_0, \omega_{k+1}) + 0 < \arg x < \min(\delta'_0, \omega_{k+2}) - 0, x \rightarrow \infty$
デ成立スル。

5. (1) ノ右辺ガ收斂デソノ和ガ $A(x), B(x) =$ 等シイ
トキ, 上ニ述ベタ I—VI ヲ使フト次ノ結果ガ得ラレル。

VII. $|x| > R$ デ常ニ $|y - \beta_0 x^{n-m}| < \varepsilon |x|^{n-m}$ ヲ満足
スル (a) ノ解ガ存在スレバ, (β) ハ收斂デ其ノ和ガ其ノ解ト
一致スル。但シ ε ハ $\forall =$ 於ケルト同シ意味ノモノデアル。

VIII. (a) ガ $|x| > R$ デ $|y - \alpha_0 x^{m+1}| \leq \delta |x|^{m+1}$ ヲ満
足スル解ヲ持テバ級数 (α) ノ係数ハ $\log x$ ヲ含マズ, 級数
 (α) ハ收斂デ, ソノ和ガ其ノ解ト一致スル。但シ δ ハ $\forall =$ 於
ケルト同シ意味ノモノデアル。

— (續ク) —

正 誤

第46号, 1頁, 10行目, 11行目, ρ ハ ρ ノ誤リ。

第48号, 3頁, 9行目 = $F(y_0) + h(x_0) \neq 0$ ナル假定ヲ
入レル。