173. Pseudo-regular function ノ應用

角谷 靜夫 (阪大)

128, 136 デ述ベタ pseudo-regular ナ函數ニヨル transformation ヲ Riemann 面ノ問題ニ應用シテ見マシタ。

136 デ考ヘタ pseudo-regular function $f(z)=u+iv$ ハ u_x, u_y, v_x, v_y ガ $f(z)$ ノ定義領域 D 全体デ連續デアッタガ D ガ有限個又ハ可附番無限個ノ部分領域ニワカレテソノ各々ニテ u_x, u_y, v_x, v_y ガ連續デアッテモ同様ノコトガ成立スル。(u, v ガ連續デアルコト及ビ條件 (ii), (iii) ハ D 全体ニテ満足サレテキルモノトスル)

ρ ヲ $0<\rho<1$ ナル實數トスルトキ, 任意ニ

$$|\alpha|\leqq\rho$$

ナル α ヲ與ヘルト

$$f(0)=\alpha,$$

$|z|=1$ ニテ $f(z)=z$

ナル如キ $|z| \leqq 1$ ニテ pseudo-regular デ且 $q(x,y) < K(\rho)$ ナル函数 $f(z)$ が存在スル。コヽニ $K(\rho)$ ハ ρ ノミニ関係スル正数デアル。

更ニ一般ニ D ヲ一ツノ領域 D' ヲ全ク D 内ニアル D ノ部分領域トスルトキ，D' 内ノ任意ノ点ヲ他ノ D' 内ノ任意ノ点ニ移シテ且ツ D ノ周ヲ少シモカヘナイ D 自身ノ schlicht ナ pseudo-regular ナ transformation ニテ $q(x,y) < K$ ナルモノが存在スル。コヽニ K ハ D, D' ノ形ノミニ関係スル正数デアル。

定理1. q が有界ナ pseudo-regular ナ函数 $w = f(z)$ ニヨッテ $|z| < \infty$ ハ $|w| < R < \infty$ ニ寫像スルコトハ出來ナイ.

コレハ 136 号定理 6 ノ特別ノ場合デアリマス。

コレヨリ次ノ定理が得ラレル。

定理2. 單一連結ナ Open ナ Riemann 面 Σ ヲ q が有界ナル如キ pseudo-regular ナ函数ニヨッテ（同ジク）單一連結ナ Riemann 面 Σ' ニ topologically ニ transform シテモ Riemann 面ノ type（hyperbolic デアルカ parabolic デアルカ）ハ変ラナイ。

Σ 全体が変形サレナクテ，ソノ一部分ダケ変形サレテモヨイ.

即チ Σ ノ上ニ（Riemann 面ノ上デ考ヘテ）互ニ他

ノ外部ニアル有限個又ハ可附番無限個ノ領域 D_i（必ズシモ単一連結デナクテモヨイ. 又 Σ ノ上ニテ互ニ他ノ外部ニアレバヨイノデアルカラ projection ハ重ナッテヰナモヨイ）ヲ取リ、各々ノ D_i ノ内部ニ q ガ（i ニ無関係ナ）K ヲ越ヘナイヤウナ pseudo-regular ナ Transformation ヲ施シテモ Σ ノ type ハ変ラナイ。

D_i トシテ Σ ヲ（projection 上ノ）閉曲線 C_i ニヨッテ切リ取ッタトキノ連結シタ部分ヲ取リ前ノ lemma ヲ用ヒルト次ノコトガ云ヘマス。

0, 1, ∞ ノ上ニ無限ニ多クノ logarithmic singularity ヲ持ツ Riemann 面 Σ（例ヘバ modular-function ノモノ）ヲ deform シテ Σ 上ノ log. singl. ヲ各々異ナル方向ヘ少シズラシテモ、ヤハリ hyperbolic デアル。

（コレハ Speiser ガ考ヘタ問題デス。Commentarii Math. Helv. Vol 1, (1929) Probleme……, §6）

Σ ノ log. singl. ヲズラシテ行クトキ、コレラガ夫々 0, 1, ∞ ヲ内部ニ含ンデ且ツ互ニ他ノ外部ニアル三ツノ領域 E_1, E_2, E_3 ヨリ外ニ出ナイトキハ Ahlfors ガ証明シテ居リマス。（Acta Soc. Scient. Fennicae, 1933）

又次ノ Ahlfors ノ定理モアル制限ノ下デ証明スルコトガ出来マス。

Ahlfors ニヨレバ Σ ガ parabolic デアルトキ

Σヲ（球面ノ上ニテ考ヘル）互ニ他ノ外部ニアル5個ノ円 C_i ($i=1,2,\cdots\cdots,5$) ニテ切レバ切口ニハ少クトモ一ツ單葉ナモノガアル。

今若シコノ切口ガスベテ二枚ヅツツナガッテヰルトスレバ Σ ガ hyperbolic ニナルコトハ次ノ様ニシテ証明出來ル。

C_i ト同心ナ円デ且ツコレヲ内部ニ含ミ、シカモ互ニ他ノ外部ニアル円 C_i^* ($i=1,2,\cdots\cdots,5$) ヲ考ヘ C_i^* ヲ lemma ニテ考ヘタ函数ニヨッテ transform シテ C_i 内ニアル Σ ノ代数的分岐点ヲ C_i ノ中心ヘウツス。

カクシテ得ラレタ Σ' ハ Carathéodory-Block ノ定理ニヨッテ hyperbolic デアルカラ Σ モ hyperbolic デナケレバナラヌ。

C_i ガ一般ノ閉曲線デアル場合モ同様デアリ、C_i ニヨル切口ガ常ニ2枚デナクテモ枚数ガ有界デアレバ同ジコトガ証明出來マス。（有限枚ヨリナル Riemann 面ニ関スル前ノ lemma ト同様ノ lemma ヲ用ヒマス）

更ニ一般ニ q 個ノ互ニ他ニ交ハラヌ閉曲線 C_i ($i=1,2,\cdots\cdots,q$) ニヨッテ Σ ヲ切ッタトキ，C_i ニヨル切口ガ常ニ少クトモ m_i 枚ツナガリ且ツ

$$\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{m_i} < q-2$$

デアレバ Σ ハ hyperbolic デアルト云フコトガスベテ

ノ C_i ニヨル切口ノ枚数ガ有界デアレバ同様ノ方法デ証明出来マス。