152. 等角寫像ニ於ケル metrical ナ一定理

吉田耕作 (阪大)

I. 定理 rectifiable 且ツ全長ノ有限ナ curve C ニヨツテ圍マレタ單一連結ナ有界領域 D ヲ單位円 $|z|<1$ ニ等角ニ寫ス函數ヲ $w=f(z)$ トスル。然ラバ $|z|=r<1$ ノ Bild ノ長サ

$$(1)\quad l(r)=\int_0^{2\pi}\left|f'(re^{i\theta})\right| r\,d\theta$$

ハ r ノ増加函數ニシテ且ツ $\lim_{r\to 1} l(r)=$ C ノ長サ。

證明. $f'(z)\neq 0$, $|z|<1$ ダカラ $\sqrt{f'(z)}=F(z)$ ハ $|z|<1$ デ正則。之レヲ

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

トスルト

$$l(r)=\int_0^{2\pi}\left|F(z)\right|^2 r\,d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n+1}$$

依ッテ $l(r)$ ハ r ノ増加函數。

次ニ Carathéodory ノ定理ニヨレバ $f(z)$ ハ $|z|\leqq 1$ ニ於テ連續且ツ schlicht。尚 $f(e^{i\theta})$ ハ θ ノ函數トシテ totalstetig (Lusin Privaloff ノ定理

Ann. l'école norm. Sup. 1925 p. 156)
依ッテ $f'_\theta(e^{i\theta})$ ハ integrable。故ニ

$$(2)\quad u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'_\varphi(e^{i\varphi})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

ナル Poisson 積分ヲ考ヘルト部分積分ニヨリ

$$(3)\quad u(re^{i\theta})=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\varphi})\frac{d}{d\varphi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\varphi})\frac{d}{d\theta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

$$=f'_\theta(re^{i\theta})=\frac{df(re^{i\theta})}{dz}rie^{i\theta}.$$

(2) 及ビ (3) ヨリ

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{df(re^{i\theta})}{dz}\right|rd\theta\leqq\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f'_\varphi(e^{i\varphi})\right|\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|f'_\varphi(e^{i\varphi})\right|d\varphi\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\theta\right\}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|f'_\varphi(e^{i\varphi})\right|d\varphi=C \text{ ノ長サ.}$$

依ッテ 増加函數ノ limit $l(r)\leqq C$ ノ長サ.
一方 $|z|=r<1$ ノ Bild curve ハ $r\to1$ ノトキ C
ニ tend スルカラ $\lim\limits_{r\to1} l(r)\geqq C$ ノ長サ (曲線ノ長サ
ハ曲線ノ lower semi-continuous 函數ナリ)。
故ニ

$$\lim_{r\to 1} l(r) = C\text{ノ長サ}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

又 Poisson 積分デ表ハサレルカラ (2), (3) ヨリ θ ノ高々 measure 0 ノ集合ヲ除キ

$$\lim_{r\to 1} f'(re^{i\theta})e^{i\theta}i = f'_\theta(e^{i\theta})$$

モ同時ニ証サレタコトニナル.（Fatou ノ定理）

上定理ハ Fejer ノ定理（例ヘバ吉田先生等角寫像論 75 頁）ニヨリ $f(z) = \sum b_n z^n$ トスレバ

$$f(e^{i\theta}) = \sum b_n e^{in\theta}$$

ナル一様收斂ナ Fourier 級數ニ展開サレルコトヲ思ヘバ Fourier 級數ニ関スル定理トモ考ヘラレルノデ其ノ方面デハ或ハワカリ切ツタコトデアルカモ知レマセンが，等角寫像ノ滑ラカサヲ知ルノニヨイト思ヒマス。

II. Lusin-Privaloff ハ（前掲論文）Fatou ノ定理ヲ使ッテ D が star regeon（C ノ rectifiable 假定セヌ）ノ場合ニ

$$\lim_{r\to 1} f'(re^{i\theta}) = \text{exist fast überall}$$

ヲ示シテヲリマス。之ト上定理トノ聯関ハ如何ナモノデセウカ。又コノ Lusin-Privaloff ノ定理ヲ倣ヘバ D が convex ノ場合ニハ

$$\lim_{r\to 1} f''(re^{i\theta}) = \text{exist fast überall}$$

ガ云ヘマス。ソレハヨク知ラレテル様ニ $zf'(z)=F(z)$ ガ $|z|<1$ ヲ *star region* ニ寫スコトヲ使ヘバヨイノデス。コノ場合ニハ I ノ定理ハ $|z|=r<1$ ノ *Bild* ガ全テ convex ナコト（例ヘバ *Montel: Fonction univalent etc.* 13頁）ヲ注意スレバ初等幾何學的ニタヤスク證明デキルコトヲ注意シトキマセウ。