159. 南雲氏ノ問題ニ就イテ(II)

北川 敏男 (阪大)

4. $\int_a^b e^{\lambda(x_0+\eta)}\left(\int_0^\eta e^{-\lambda t}f(t)dt\right)d\varphi(\eta)$ (＝J トオク) ノ

分解.

假定〔I,〕ト積分ノ順序交換トカラ

$$J=\int_0^b e^{-\lambda t}f(t)\left(\int_t^b e^{\lambda(x_0+\eta)}g'(\eta)d\eta\right)dt$$

$$+\int_a^0 e^{-\lambda t}f(t)\left(\int_t^a e^{\lambda(x_0+\eta)}g'(\eta)d\eta\right)dt$$

$$+\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda(x_0+t_i)}\int_0^{t_i} f(t)e^{-\lambda t}dt$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III} \quad (\text{トオク})$$

$b>x_0>0$ トシテ分解ニトリカヽル。

1°. $$\mathrm{I}=\int_0^b e^{-\lambda t}f(t)\left(\int_t^b e^{\lambda(x_0+\eta)}g'(\eta)dy\right)dt$$

$$=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4$$

但シ茲ニ

$$\mathrm{I}_1=\int_{-x}^{-\delta} e^{-\lambda\tau}f(x_0+\tau)\left(\int_{x_0+\tau}^b e^{\lambda\eta}g'(\eta)d\eta\right)d\tau$$

$$\mathrm{I}_2=\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau}f(x_0+\tau)\left(\int_{x_0+\tau}^b e^{\lambda\eta}g'(\eta)d\eta\right)d\tau$$

$$I_3=\int_0^{\delta} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\left(\int_{x_0+\tau}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta\right)d\tau$$

$$I_4=\int_{\delta}^{b-x} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\left(\int_{x_0+\tau}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta\right)d\tau$$

更ニ，コレラヲ分解スル。

(i) $$I_1=e^{\lambda x_0}\int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t)\,\frac{e^{\lambda b}[g'(b)]-e^{\lambda t}[g'(t)]}{\lambda}\,dt$$

（〔假定 I_1〕ト補助定理２トヲ使フ）

$$=\frac{[g'(b)]\,e^{\lambda(x_0+b)}}{\lambda}\int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t)\,dt$$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_0^{x_0-\delta} f(t)[g'(t)]\,dt$$

(ii) $$I_2=\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\left(\int_{x_0+\tau}^{b-\delta_1} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta\right)d\tau$$

$$+\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,d\tau\int_{b-\delta_1}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta$$

$$=\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,\frac{[g'(b-\delta_1)]\,e^{\lambda(b-\delta_1)}-[g'(x_0+\tau)]\,e^{\lambda(x_0+\tau)}}{\lambda}\,d\tau$$

$$+f(x_0-0)\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau}\,d\tau\int_{b-\delta_1}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta$$

$$+\int_{-\delta}^{0}\left\{f(x_0+\tau)-f(x_0-0)\right\} e^{-\lambda\tau}\,d\tau\int_{b-\delta_1}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta$$

$$
= \frac{+[g'(b-\delta_1)]\,e^{\lambda(b-\delta_1)}}{\lambda}\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,d\tau
$$

$$
-\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\int_{-\delta}^{0} f(x_0+\tau)[g'(x_0+\tau)]\,d\tau
$$

$$
+ f(x_0-0)\,\frac{-1+e^{\lambda\delta}}{\lambda}\int_{b-\delta_1}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta
$$

$$
+\int_{-\delta}^{0}\{f(x_0+\tau)-f(x_0-0)\}\,e^{-\lambda\tau}\,d\tau\int_{b-\delta_1}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta
$$

(iii) $$ I_3=\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\int_{x_0+\tau}^{b-\delta_2} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta\,d\tau $$

$$
+\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,d\tau\int_{b-\delta_2}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta
$$

$$
= \frac{[g'(b-\delta_2)]\,e^{\lambda(b-\delta_2)}}{\lambda}\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,d\tau
$$

$$
-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_{0}^{\delta} f(x_0+\tau)[g'(x_0+\tau)]\,d\tau
$$

$$
+ f(x_0+0)\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda\tau}\,d\tau\int_{b-\delta_2}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta
$$

$$
+\int_{0}^{\delta}\{f(x_0+\tau)-f(x_0+0)\}\,e^{-\lambda\tau}\,d\tau\int_{b-\delta_2}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta
$$

$$
= \frac{[g'(b-\delta_2)]\,e^{\lambda(b-\delta_2)}}{\lambda}\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,d\tau
$$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_0^{\delta} f(x_0+\tau)\left[g'(x_0+\tau)\right]d\tau$$

$$+f(x_0+0)\,\frac{1-e^{-\lambda\delta}}{\lambda}\int_{b-\delta_2}^{b} e^{\lambda\eta}g'(\eta)\,d\eta$$

$$+\int_0^{\delta}\left\{f(x_0+\tau)-f(x_0+0)\right\}e^{-\lambda\tau}d\tau\int_{b-\delta_2}^{b} e^{\lambda\eta}g'(\eta)\,d\eta$$

注意： (ii), (iii) ニ於イテ、假定 I_1, II_1, II_2 ヲ使用シテキル。

尚 $0<\delta<\delta_1$， $0<\delta<\delta_2$ トシテオク。

(iv) $$\mathrm{I}_4=\int_{\delta}^{b-x_0} e^{-\lambda\tau}f(x_0+\tau)\left(\int_{x_0+\tau}^{b} e^{\lambda\eta}g'(\eta)\,d\eta\right)d\tau$$

$$=\frac{\left[g'(b)\,e^{\lambda b}\right]}{\lambda}\int_{\delta}^{b-x_0} f(x_0+\tau)\,e^{-\lambda\tau}d\tau$$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_{\delta}^{b-x_0} f(x_0+\tau)\left[g'(x_0+\tau)\right]d\tau$$

2° $$\mathrm{II}=\int_a^0 e^{-\lambda t}f(t)\left(\int_t^a e^{\lambda(x_0+\eta)}g'(\eta)\,d\eta\right)dt$$

$$=\frac{\left[g'(a)\right]e^{\lambda(x_0+a)}}{\lambda}\int_a^0 e^{-\lambda t}f(t)\,dt$$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_a^0 f(t)\left[g'(t)\right]dt$$

5. 依テ以上ノ分解ノ結果ニ於イテ

1° (i) カラ $\dfrac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\displaystyle\int_0^{x_0-\delta} f(t)[g'(t)]\,dt$

(ii) カラ $\dfrac{[g'(b-\delta_1)]\,e^{\lambda(b-\delta_1)}}{\lambda}\displaystyle\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,d\tau$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_{-\delta}^{0} f(x_0+\tau)[g'(x_0+\tau)]\,d\tau$$

(iii) カラ $\dfrac{[g'(b-\delta_2)]\,e^{\lambda(b-\delta_2)}}{\lambda}\displaystyle\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,d\tau$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_{0}^{\delta} f(x_0+\tau)[g'(x_0+\tau)]\,d\tau$$

(iv) ノ全部

2° ノ全部

以上ノ各積分値ハ，δ_i，δ ヲ充分小サクトッテオケバ λ ノ函數トシテ

$$R\lambda \geqq 0 \text{ ニテハ } \frac{O(e^{\lambda k})}{\lambda} \qquad (k<b)$$

$$R\lambda \leqq 0 \text{ ニテハ } \frac{O(e^{\lambda l})}{\lambda} \qquad (l>a)$$

ナル如キ k, l ヲ各々ニ對シテ見出シウル。コノ事ハ豫備定理 1 ヲ適用スレバ明カデアル。

依ッテ $\dfrac{1}{G(\lambda)}$ ヲカケテ $\mathbb{C}_n$ 上デ積分スレバ $n\to\infty$ ノトキ零トナル。

ソレ故ニ

$$\text{A.}\quad \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda(x_0+t_i)} \int_0^{t_i} f(t) e^{-\lambda t} dt}{G(\lambda)} + \frac{[g'(b)] e^{\lambda(x_0+b)}}{\lambda G(\lambda)} \int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t) dt$$

(Ⅲ) $\qquad 1^{\circ}$. (i)

$$\text{B.}\quad \frac{1}{G(\lambda)} \int_{-\delta}^{0} \{f(x_0+\tau) - f(x_0-0)\} e^{-\lambda\tau} \int_{b-\delta_1}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta) d\eta$$

$$\text{C.}\quad \frac{1}{G(\lambda)} \int_{0}^{\delta} \{f(x_0+\tau) - f(x_0+0)\} e^{-\lambda\tau} d\tau \int_{b-\delta_2}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta) d\eta$$

ヲバ、$\mathbb{C}_n$ 上デ積分シテ $n \to \infty$ ノトキ零トナレバ，吾人ノ定理ノ証明ハ完結スル。 以下 §6 デ A, §7 デ B, C ニツイテ之レヲ示サウ。

$$6.\quad \oint_{\mathbb{C}_n} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda(x_0+t_i)} \int_0^{t_i} f(t) e^{-\lambda t} dt}{G(\lambda)} + \frac{[g'(b)] e^{\lambda(x_0+b)}}{\lambda G(\lambda)} \int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t) dt \right\} d\lambda$$

$$= \oint_{\mathbb{C}_n} \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda(x_0+t_i)} \int_0^{t_i} f(t) e^{-\lambda t} dt}{G(\lambda)} d\lambda$$

$$+ \oint_{\mathbb{C}_n} e^{\lambda x_0} \int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t) dt\, d\lambda + \oint_{\mathbb{C}_n} \frac{[g'(a)] e^{\lambda(x_0+a)}}{\lambda G(\lambda)} \int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t) dt\, d\lambda$$

$$- \oint_{\mathbb{C}_n} \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda(t_i+x_0)}}{G(\lambda)} \int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t) dt\, d\lambda$$

$$=\oint_{\mathbb{C}_n}\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\lambda(t_i+x_0)}}{G(\lambda)}\int_{x-\delta}^{t_i}f(t)e^{-\lambda t}dt\,d\lambda$$

$$+\oint_{\mathbb{C}_n}\frac{[g'(a)]e^{\lambda(x_0+a)}}{\lambda G(\lambda)}\int_0^{x_0-\delta}e^{-\lambda t}f(t)\,dt\,d\lambda$$

茲ニ，$a<0$ ダカラ $x_0+a<b$ ナルコトニ注意スレバ，豫備定理 3 ニ由リ、第二ノ積分ハ $n\to\infty$ ノトキ零ニナル。

又 $\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\lambda(t_i+x_0)}\int_{x_0-\delta}^{t_i}f(t)e^{-\lambda t}dt$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\lambda(t_i+\delta)}}{\lambda}-\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\lambda x_0}f(t_i)}{\lambda}$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\lambda(t_i+x_0)}}{\lambda}\int_{x-\delta}^{t_i}e^{-\lambda t}\left(\int_{x_0-\delta}^{t}f(\tau)d\tau\right)dt$$

ナル故ヲ以ッテ、豫備定理 1, 3 カラ第一積分モ $n\to\infty$ ノトキ零トナル。

7. $f(x)$ ハ点 x_0 ノ近傍デ 即チ $[x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon]$ $(\varepsilon>\delta>0)$ デ負ナラザル單調增加函数ナリトシテ、積分ノ第二ノ平均値定理ニ依リ

$$\int_0^{\delta}\left\{f(x+\tau)-f(x+0)\right\}e^{-\lambda\tau}d\tau$$

$$=\int_0^\delta\left\{f(x+\tau)-f(x+0)\right\}e^{-\mu\tau}\cos\nu\tau\,d\tau-i\int_0^\delta\left\{f(x+\tau)-f(x+0)\right\}e^{-\mu\tau}\sin\nu\tau\,d\tau$$

$$=\left\{f(x+\delta-0)-f(x+0)\right\}\left\{\int_{\delta'}^{\delta}e^{-\mu\tau}\cos\nu\tau\,d\tau-i\int_{\delta''}^{\delta}e^{-\mu\tau}\sin\nu\tau\,d\tau\right\}$$

然ルニ

$$\int_{\delta'}^{\delta}e^{-\mu\tau}\cos\nu\tau\,d\tau-i\int_{\delta''}^{\delta}e^{-\mu\tau}\sin\nu\tau\,d\tau$$

$$=\begin{cases} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right) & \mu\geqq 0 \text{ ノトキ} \\ O\left(\dfrac{e^{-\mu\delta}}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right) & \mu\leqq 0 \text{ ノトキ} \end{cases}$$

依ツテ

$$\oint_{\mathfrak{C}_n}\frac{1}{G(\lambda)}\int_0^\delta\left\{f(x_0+\tau)-f(x_0+0)\right\}e^{-\lambda\tau}d\tau\,d\lambda$$

ハ $|f(x_0+\delta-0)-f(x_0+0)|$ ノ或常数倍ヲ越エズ，従ツテ $\delta\downarrow 0$ ト共ニ、零ニ tend スル。

$f(x)$ が点 x_0 ノ近傍デ有界変分ナラバ，負ナラザル単調増加函数ノ差ニ直シテ、同様ノコトが云ヘル。

依ッテCニツイテ証明スベキコトが出来タ。

Bニツイテモ全ク同様デアル。

8. §4 以下 $b>x_0>0$ トシテデアルが $a<x_0<0$ ノトキモ同様デ、コノ場合ニハ，豫備定理4ノ第二ノ積分が役立ツコト，$x_0=0$ ノトキニハ，第一，第二ノ積分が役

立ツコトガ容易ニワカル。

依ッテ §1 ノ定理ノ証明ガ出来タ。

更ニ進ンデ次ノ如キ結果ヲ得ル。

系：　§1 ニテ假定〔II_1〕，〔II_2〕ニ代フルニ、夫々

〔假定II_1'〕　函數 $f(x)$ ガ區間〔$\xi+2a$, $\xi+2b$〕デ Lebesgue 積分可能デアル。

〔假定II_2'〕　函数ガ一点 x_0（但シ $\xi+a<x_0<\xi+b$）ニテ有界変分デアルヲ以テスレバ

点 x_0 ニ對シテ

$$S_n(x_0,\xi)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_n}\frac{1}{G(\lambda)}\left\{\int_a^b e^{\lambda(x_0+\eta)}\left(\int_\xi^{\xi+\eta}e^{-\lambda t}f(t)dt\right)d\varphi(\eta)\right\}d\lambda$$

$$\to\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

定理 2.　系ノ〔假定II_2'〕ニ代フルニ，

〔假定II_2^*〕　$f(x)$ ガ（$\xi+a$, $\xi+b$）ニ含マレル區間〔$\xi+a'$, $\xi+b'$〕デ連續有界変分ナリトスル

ヲ以ッテスレバ，〔$\xi+a'$, $\xi+b'$〕ノ内部ニ含マレル任意ノ閉區間〔$\xi+a''$, $\xi+b''$〕ニ於ケル x ニ関シテ一様ニ

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x,\xi)=f(x).$$

証明：　コレニハ，次ノ事實ニ着目スレバヨイ。

(i)　豫備定理 3 ノ A_1, B_1 ノ証明ヲ振返ッテミルトキ

A_1^*：　$r\geqq a'>a$ ナルトキハ，r ニ関シテ一様ニ

$$\lim_{n\to\infty} S-(n, r)=0$$

B_1^*: $r \leqq b' < b$ ナルトキニハ，rニ関シテ一様ニ

$$\lim_{n\to\infty} S+(n, r)=0$$

トナルコト

(ii) §7ニテ、$f(x+\delta-0)-f(x+0)$ 即チ $f(x+\delta)-f(x)$ ガ $[a'', b'']$ ニテ一様ニ、δ ト共ニ零ニ tend スルコト。(コヽニ假定 II_2' ヲ使フ)

9. 定理 4. 今§1ニテ假定 I_1, I_2 ノ外ニ更ニ

〔假定 II_2''〕 $f(x)$ ハ任意ノ有限區間デ連續有界変分デアリ

〔假定 III〕 $\displaystyle\int_a^b f(x+t)\,d\varphi(t)=0 \quad (-\infty<x<+\infty)$

トスレバ

〔主張〕 任意ノ有限閉區間 $[p, q]$ ニテ一様ニ，

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x, 0)=f(x)$$

〔証明〕 §8ノ定理2ヲ見ルトキ，$S_n(x, \xi)$ ニテコノ係数ガ ξ ニ independent ナ値ヲモツコトガ云ヘサヘスレバヨイ。蓋シ，$[p, q]$ ニ属スル任意ノ一点 x_0 ヲトレバ，必ズ $\xi+a<x_0<\xi+b$ ナル如キ ξ ガアル。従ツテ

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x,\xi)=f(x)$$

ガ x_0 ヲ含ムアル閉區間，例ヘバ　$\left[\xi+\frac{a}{2},\ \xi+\frac{b}{2}\right]$ ＝テ一様＝成立スルカラデアル。

サテ $S_n(x,\xi)$ ＝テ　$x^{p_n-r}e^{\lambda_n x}$ ノ係数、$a_{n,p_n-r}(\xi)$ ハ容易＝分ル如ク

$$a_{n,\,p_n-r}(\xi)$$

$$=\frac{p_n!}{(p_n-r)!\,(r-1)!\,G^{(p_n)}(\lambda_n)}\int_a^b e^{\lambda_n\eta}\left\{\int_\xi^{\xi+\eta}(\xi+\eta-t)^{r-1}f_1(t)e^{-\lambda_n t}dt\right\}d\varphi(\eta)$$

但シ

$$f_1(t)=f(t)-e^{\lambda_n t}\left(a_{n,\,p_{n-1}}(\xi)\,t^{p_n-1}+\cdots\cdots+a_{n,\,p_n-r+1}\,t^{p_n+1-r}\right)$$

ト假＝オク。

$$\text{又}\quad \left.\begin{array}{ll} G^{(s)}(\lambda_n)=0 & s=0,1,2,\cdots\cdots,p_n-1 \\ G^{(p_n)}(\lambda_n)\neq 0 & \end{array}\right\}\ (!)$$

ソレ故＝　$\dfrac{d\,a_{n,\,p_n-r}(\xi)}{d\xi}$　ノ形ガ容易＝ワカリ、

コヽデ〔假定III〕ト（!）トカラ

$$\frac{d\,a_{n,\,p_n-r}(\xi)}{d\xi}=0$$

ナルコトヲ知ル。

10. （附記）　南雲氏ノ問題＝関聯シテ色々ナ問題ガ派生シテ來ル。次号カラ、ソレラ＝関聯シテ筆者ノ得タ二三ノ結果ヲ申シ上ゲタイト思ヒマス。

ソレカラ、尚一言。

假定I_1, I_2ハ, $G(\lambda)$ヲバ exponential sum ニ直ストコロニ用キタノデアリマシテ、他ノ假定デアッテモ $G(\lambda)$ ガ exponential sum ニ直リサヘスレバ、同様ニ行クワケデアリマス、コノ事ハ何レハッキリ書クコトニ致シタイト思ヒマスが，ソノ特別ノ場合

$$G(\lambda)=\int_a^b e^{\lambda t}dt$$

トシテ Fourier 級数ヲ含ムノデスカラ.

若シ，筆者ノ得タ結果が正シケレバ，Fourier 級數論ニ於ケル古典的ナ Jordan ノ收斂條件ニ相當シテ居ルワケデス。ソコニ於イテ知ラレテキル幾多ノ收斂條件が，ドノ程度マデ吾々ノ問題ニアテハマルカ、コレニ關シテハ，諸賢ノ御教示ニ俟チタイト思ヒマス。ソノタメニ Fourier 級数論ニ於ケル Dirichlet ノ積分ニ Correspond シタ積分ヲ考ヘテハ如何デセウカ？

——（續ク）——