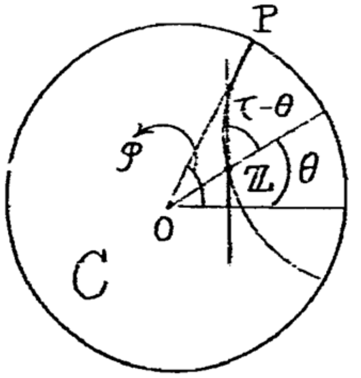
152. Poisson積分ノ小児的解釋

南雲 道夫(阪大)

二次元（平面）ノ調和函數ニ於ケルPoisson ノ積分ニ關スル一ツノ初等的ナ解釋ヲ一寸思ヒツイタマヽ申上ゲマス。アマリ平凡ナ事故，スデニ充分ヨク知ラレテヰルコトカトモ思ヒマス。



Cヲ單位円，$\mathbb{Z}=re^{i\theta}$ヲC内ノ任意ノ一点，$P=e^{i\varphi}$ヲC周上ノ任意ノ点トシ，PニテCト直交スル円ガC円ノ半径$O\mathbb{Z}$ト交ハル角ヲ$T-\theta$トスレバ，Pノ位置ハTニヨッテ決定サレル。ソコデ調和函數$u(x,y)$ガC周上デ取ル値ヲTノ函數トシテ$U(T)$デ表ハセバ[$\mathbb{Z}=x+iy$トス]

(1) $$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(T)\,dT.$$

何トナレバ調和函數ハ等角寫像ニヨッテ不変デアルカラ，特ニ

$$w=\frac{z-\mathbb{Z}}{\bar{\mathbb{Z}}z-1}$$

ナル円ノ對應ニヨッテ$\mathbb{Z}$ヲ円ノ中心ニ移セバ（Tハ不変），(1)ハ円周上ノ値ノ平均値ガソノ中心ニ於ケル値ニ等シイコトヲ示スカラデアル。

所が $z=e^{i\varphi}$, $w=e^{i\tau}$ トスレバ,

$$d\tau=|dw|=\frac{|1-\mathbb{Z}\overline{\mathbb{Z}}|}{|\overline{\mathbb{Z}}z-1|^2}|dz|$$

$$=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi.$$

カクシテ次ノ Poisson ノ積分ヲ得ル。

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi$$

上ト類似ノ考ヘ方ヲ3次元ノ調和函数ノ球面ニ関スル積分公式ニモ應用出來ルダラウト思ヒマス。

扨テ上ノ考ヘデハ調和函数ニ関スル基本的性質トシテ，円周上ノ平均値ガソノ中心ニ於ケル値ニ等シイコトヲ假定シテ居マス．次ニ我々ハ (1) ナル形ニ表ハサレル函数ガ調和函数デアッテソレガ円周デ與ヘラレタル値 $U(\tau)$ ニ一致スルコトヲ示シマセウ。$u(x,y)$ ガ C 内デ連続デ C ノ周上ノ一点ニ近ヅクトキ，$u(x,y)$ ガ $U(\tau)$ ニ近ヅクコトハ初等的ニ容易ニ証明出來マスカラ、只 $u(x,y)$ ガ C 内デ harmonic ナコトダケヲ証明シマセウ。ソレニハ $P=e^{i\varphi}$ ヲ一定トスル時，τ ガ (x,y) ノ函数トシテ $[\mathbb{Z}=x+iy]$ harmonic ナコトヲ証明スレバヨイ。所が

$$w=\frac{z-\mathbb{Z}}{\overline{\mathbb{Z}}z-1}$$

デ $z=e^{i\theta}$, $w=e^{i\tau}$ トスレバ

$$i\tau = \log w = \log(e^{i\theta} - \mathbb{Z}) - \log(e^{i\theta}\overline{\mathbb{Z}} - 1).$$

上ノ右辺ハ $f_1(\mathbb{Z}) + f_2(\overline{\mathbb{Z}})$ ナル形ヲ有スル。但シ $f_\nu(\zeta)$ ハ ζ ノ解析函数デ C 内デ一價正則デアル。シカラバ $f_1(\mathbb{Z})$ 及ビ $f_2(\overline{\mathbb{Z}})$ ノ各虚数部分ハ調和函数デアル〔(x, y) ヲ $(x, -y)$ ニカヘテモ調和函数デアル〕ガ故ニ $\tau(x, y)$ ハ調和函数デアル。

（証明了）