

142. 常微分方程式ノ解ノ單獨條件ニ就テ

福原満洲雄(北大)

前回デ、從來ハ

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ニ關スル解ノ單獨條件ヲ

$$(2) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(x, y_1 - y_2)$$

ナル形デ求メテ居タガ、サウイフ形ヲ持タナイ單獨條件が得ラレル客デアレコトヲ述ベタ。此ノ問題ニ關シテ未ダ纏ツタ結果ヲ得テ居ナイノデアレカラ簡單ナ場合ヲ例ニ取ツテ、私ノ考ヘヲ荒削リノママ述マルコトニスル。変數ハ勿論實トスル。

— 1 —

一般ニ

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = G(y)$$

ニ於テ $G(y)$ が y_0 デ連続デ $0 =$ 等シクナケレバ此ノ微分方程式ハ $y(x_0) = y_0$ ヲ満足スル解ヲ唯一ツ持ツノデアレカラ、一般ニ $f(x, y)$ が (x_0, y_0) デ連続デ $0 =$ 等シクナク且ツ

$$(4) \quad f(x, y_1) - f(x, y_2) < G(y_1) - G(y_2) \quad (y_1 > y_2)$$

ヲ満足シテ居レバ $y(x_0) = y_0$ ヲ満足スル

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

— 1 —

ノ解ハ唯一ツデアルトハ言ヘナイデアラウカ? カウイフ疑問
 が起ルノハ當然デアルガ、ソレヲ解クニ當ツテ從來ノ方法ハ
 役ニ立タナイヤウニ見エル。其ノ理由ノ説明ナド結果ニ重キ
 ヲ置ク人ニ取ツテハツマラナイコトカモ知レナイガ、問題発
 生ノ原因ヲ究明スルコトモ決シテ輕々ニ看過スベキデアラカ
 ラウシ、ソレガドウイフ風ニ發展スベキカトイフコトノ考察
 モ急ツテハナラナイト思ヒ説明ヲ附ケ加ヘルノデアアル。

條件(4)ノ形ヲ見テ、ソレガ(2)ノ形ニナラナイカラ從來
 ノ方法ヲハ駄目ト結論スルノハ早過ぎル。ト云フノハ *Montel*
 (方程式ガーツノ場合), *Marchaud* (聯立方程式ノ場合)
 等ハ條件ヲ

$$(5) \quad f(x, y) - f(x, y_1(x)) \leq F(x, y_1(x), y - y_1(x))$$

ナル形ニシテ居ル、茲ニ $y_1(x)$ ハ(1)ノーツノ解デアル、
 條件ヲ

$$f(x, y) \leq F(x, y)$$

ナル形ニシテ $f(x, 0) = 0$ ト假定シ $y_1(x_0) = 0$ ヲ満足ス
 ル(1)ノ解ヲ考ヘテモ本質的ニハ同ジデアル。此ノ方が式ガ
 簡單ニナルカラ私ハ常ニ此ノ形ヲ論ジテ居ル。

$$F(x, y, z) = G(y+z) - G(z)$$

ト置クコトニヨリ條件(4)ノ場合ガ合マレル。ソレデアハ條件
 (4)ヲ論ズルコトガ出來ルノカト思フト、ソウ簡單ニ行カナ
 イ。 $y_1(x)$ ヲ $y_1(x_0) = y_0$ ヲ満足スル(1)ノーツノ解ト
 シタ時

$$(6) \quad \frac{dz}{dx} = G(z + y_1(x)) - G(y_1(x))$$

が $z=0$ より他 $z(x_0) = 0$ を満足スル解ヲ持タナイナラバ (1) = 関スル解ノ單獨性が証明サレル。併シ解ノ單獨性が分ツテ居ルノハ (3) デアツテ (6) デハナイ、從來ノ方法ヲ直接 = 條件 (4) = 應用スルコトが出来ナイ理由ハココニアル、敢テ直接 = トイフワケハ変数ノ變換ヲ施シテカラナラバ應用出来ルカラデアル。

- 2 -

成ルベク筋道ガハツキリ分ルマデ $f(x_0, y_0) = 1$,
 $G(y_0) = 1$, $x_0 = y_0 = 0$ トシテ置ク、 $y(x_0) = y_0$ を満足スル

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = G(y) + h(x) \quad [h(x_0) = 0]$$

ノ解ガニツアルトシ、其等ヲ $\varphi(x)$, $\psi(x)$ デ表ハセバ $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ハ

$$\varphi(x) = x(1 + \varphi_1(x)), \quad \psi(x) = x(1 + \psi_1(x))$$

ナル形ニ表ハサレル。茲ニ $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ ハ $x=0$ デ $0 =$ ナル連続ノ函数デアル。

$\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ ハ

$$x(1 + \eta) = y$$

ナル變換ニ依ツテ得ラレル方程式

$$(8) \quad \frac{d\eta}{dx} = -\frac{\eta+1-G(x(1+\eta))-h(x)}{x}$$

ノ解デアアル。此ノ方程式ニ関スル解ノ單獨性が分レバ

$\varphi_1(x) = \psi_1(x)$ 従ツテ $\varphi(x) = \psi(x)$ トナル。(7)ニ関スル解ノ單獨性が分レバ(4)が(1)ニ関スル解ノ單獨條件ニナルコトヲ知ル。(8)ニ関スル解ノ單獨性が分ル簡單ナ場合ハ

$$\lim_{x \rightarrow 0} x G'(x) = 0$$

ニ依テ與ヘラレル。此ノ時ニハ(8)ノ右辺ガ η ノ減少函数トナルカラデアアル。前回ニ挙ゲタ例

$$G(y) = \sqrt{|y|} + \varepsilon y \hat{o} s \hat{u}$$

ハ此ノ條件ヲ満たシテキル。

コンナワケデ従来ノ理論ガ基礎ニナルコトニ変リハナイガ、ソレヲ直接ニ應用シヨウトスルト無理ガ起リ適當ナ変換ヲ豫メ施シテ置クト都合ガヨイ場合ガ起リ得ル。ソレハ兎ニ角トシテ、(4)ヨリモツト廣イ形ノ單獨條件モ求めラレルガココマデ來レバ更ニ変ツタ現象ガアレワケデハナイカラ此ノ問題ハ此ノ辺デ一先ツ筆ヲ擱ク。

— 3 —

最後ニ解ノ單獨條件ヲ証明スルノニ変数ノ変換ヲ利用スレコトハ己ニ1930年ノ日本數學新報ヲ南雲氏がマツテ居ラレルコトヲ注意シテ置キタイ。其処デハソレマデニ得レタ解

ノ單獨條件ヲ簡單ニ求メラレルコトヲ示シテ居ルが新シイ形
ノモノヲ出シテ居ナイノヲ案外注目ヲ惹イテ居ナイデハナイ
カト思ツテ一言附記スレ次第デス。

前田(40号)ノ正誤

4頁下カラ7行目

$$\frac{dy}{dx} = X$$

$$\frac{d\eta}{dx} = X$$