132. 三角級數ノ和ノ積分可能性ニ關スル一注意

高橋龍夫（東北大）

一ツノ三角級數

$$(1)\quad \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

ガ一ツノ區間 (a, b) デ一ツノ函數 $S(x)$ ニ收斂シテモソノ

函数ガ積分可能デアルカ否カハ分ラナイ。實際 $S(x)$ ガ non-negative デアッテモ積分可能ニハナラナイ。ソレデコノ外ニ如何ナル條件ガアレバ $S(x)$ ガ積分可能ニナルカトイフコトガ問題ニナル。之レニ付イテハ Steinhaus, Zygmund, Verblunsky ノ研究ガアル。

最近ノ三角級数ノ單一性ノ理論デハ (1) ノ Poisson sum ノ性質（積分可能性）カラ單一性ヲ論ジテヰル、ソレデ上ニ述ベタト同ジニ Poisson sum ノ積分可能性ガ問題ニナル、之レニ就イテ Verblunsky ノ定理ガアル。

定理. モシ(1)ノ lower Poisson sum $\underline{P}(x)$ ガ

(2) $\underline{P}(x) \geqq 0 \quad (a < x < b)$

ヲ満足シ

(3) $a_n = O(1), \ b_n = O(1),$

且ツ、$x=a, \ x=b$ デ

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{n}$$

ガ收斂スレバ、$\underline{P}(x)$ ハ (a, b) デ Lebesgue ノ意味デ可積分デアル。

コンデハ條件(2)ヲモット一般ニシヤウ。即チ

定理. (1)ノ upper Poisson sum 及ビ lower Poisson sum ヲ大々 $\overline{P}(x), \underline{P}(x)$ トスル. 今

$$\underline{P}(x) > -\infty, \quad \overline{P}(x) \geqq 0$$

トシ、(3) ガ満足サレ、更ニ (4) ガ $x=a, \ x=b$ デ收斂ス

レバ、$\overline{\mathrm{P}}(x)$, $\underline{\mathrm{P}}(x)$ ハ共ニ (a, b) デ可積分デアル。

証明. (3)カラ

$$F(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \cos nx+b_n \sin nx}{n^2}$$

ハ連続函数デアル。 假定カラ $\underline{\mathrm{P}}(x)>-\infty$ デアルカラ、(a,b) 内ニ一ツノ non-dence closed set F_1 ガアッテ、ソノ contiguous interval δ ヲトルト、ソノ interior interval d デ $\underline{\mathrm{P}}(x)>\mathrm{K}$ ナル常数 $\mathrm{K}=\mathrm{K}(d)$ ガアル。今 $\Phi(x)=F(x)-\mathrm{K}\frac{x^2}{2}$ トオクト、$\Phi(x)$ ハ明カニ d デ連続デアル、ソシテ Rajchman－Zygmund ノ定理カラ

$$\overline{\mathrm{D}}^2\Phi(x)=\overline{\mathrm{D}}^2F(x)-\mathrm{K}\geqq\underline{\mathrm{P}}(x)-\mathrm{K}>0.$$

コヽニ $\overline{\mathrm{D}}^2f(x)$ ハ $f(x)$ ノ upper generalized 2nd derivative デアル. Steinhaus ニヨルト、一般ニ一ツノ closed interval (a, b) デ連続ナ函数 $F(x)$ ガ $a<x<b$ ノスベテノ x ニ付イテ $\overline{\mathrm{D}}^2F(x)\geqq 0$ ナラバ、$F''(x)$ ガ (a,b) ノ殆ンドスベテノ点デ存在スル。故ニ $\Phi''(x)$ ガ殆ンドスベテノ点デ存在スル。従ッテ $\mathrm{D}^2\Phi(x)$ (generalized 2nd derivative) ガ殆ンドスベテノ点デ存在スル。即チ $\mathrm{D}^2F(x)$ ガ殆ドスベテノ点デ存在スル。故ニ δ ノ殆ドスベテノ点デ $\mathrm{D}^2F(x)$ ガ存在スル。

次ニ F_1 ノ perfect kernel ヲ Π_1 トスルト、F_1 ハ enumerable set ト Π_1 ノ和デアル。$\underline{\mathrm{P}}(x)>-\infty$ デアルカラ Π_1 ニ関シテ non-dence デ closed ナ Π_1 ニ含

マレル集合 F_2 ガアッテ、更ニ F_2 ニ contiguous ナ interval δ_1 ノ interior interval d ヲトルト常数 $\underline{K}_1=\underline{K}_1(d_1)$ ガアッテ $x\subset\Pi_1 d_1$ ノトキ $\underline{P}(x)\geqq\underline{K}_1$. 故ニ d_1 デ前ト同ジ論理ヲ用ヒルト $D^2F(x)$ ガ δ ノ殆ンドスベテノ点デ $D^2F(x)$ ガ存在スルコトガ分ル、コノ論法ヲ繰返シ transfinite induction ヲ用ヒテ、(a,b) ノ殆ドスベテノ点デ $D^2F(x)$ ガ存在スルコトヲ知ル。

サテ Fatou ノ定理カラ、$D^2F(x)$ ノ存在スル点デハ

(5) $\quad D^2F(x)=\overline{P}(x)=\underline{P}(x)$.

$\overline{P}(x)\geqq 0$ デアルカラ殆ンドスベテノ点デ $D^2F(x)\geqq 0$. 且ツ $P(x)>-\infty$ デアルカラ $\overline{D}^2F(x)>-\infty$ ガ至ルトコロ成リ立ツ (何トナレバ、$\overline{D}^2F(x)\geqq\underline{P}(x)$ ナル故). $\overline{D}^2F(x)\geqq 0$ ナル如キ点デ $\phi(x)=0$ トシ $\overline{D}^2F(x)<0$ ナル如キ点デハ $\phi(x)=\overline{D}^2F(x)$ トオクト、$\phi(x)$ ハ零ニ equivalent ナ函数、従ッテ勿論可積分デ且ツ至ル所有限デアル。

ソシテ

(6) $\quad \overline{D}^2F(x)\geqq\phi(x)$

デアル。

之レカラハ Verblunsky ノ論文 (Journal London Math. Soc. 6 (1931) p.p. 109—110) ト同様デアル。但シ Lemma 1 ヲ用フトコロヲ Lemma 2 ヲ用ヒル。結局 $D^2F(x)$ ガ (a,b) デ可積分ニナル。(5) カラ $\overline{P}(x)$, $\underline{P}(x)$ ガ

可積分ニナル。

上ノ定理ニ於テ (2) ハ更ニ

$$\underline{P}(x) > -\infty, \ \overline{P}(x) \geqq \psi(x) \quad (\psi(x) \text{ ハ可積分函数})$$

デオキカヘラレル。