123. 函數方程式 $f(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1}f(t)\,dt$ ニツイテ

泉　信一（東北大）

南雲氏ガ函數方程式

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)\,dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ヲ満足スル函數 $f(x)$ ニツイテ研究サレタ[1]、コヽニハ次ノ定理ヲ証明スル。

定理　モシ $f(x)\in L^2(-\infty,+\infty)$ 及ビ $f(x)$ ガ (1) ヲ満足スルナラバ、$f(x)$ ハ恒等的ニ零デアル。

証明　(1) カラ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}f(x)e^{-uxi}dx=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}e^{-uxi}dx\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-(A-1)}^{A-1}f(t)dt\int_{t-1}^{t+1}e^{-uxi}dx+\int_{-A-1}^{-A+1}f(t)dt\int_{-A}^{t-1}e^{-uxi}dx\right.$$

$$\left.+\int_{A-1}^{A+1}f(t)dt\int_{t-1}^{A}e^{-uxi}dx\right]$$

(1)　南雲, 三野, 角谷, 本紙上談話会, 第二十一号; 南雲, 角谷, 同紙第二十二号。

$$=\frac{-1}{2\sqrt{2\pi}\,ui}\Bigg[\int_{-(A-1)}^{A-1} f(t)e^{-uti}\left(e^{-ui}-e^{ui}\right)dt$$

$$+\int_{-A-1}^{-A+1} f(t)\left(e^{-u(t-1)i}-e^{uAi}\right)dt+\int_{A-1}^{A+1} f(t)\left(e^{-Aui}-e^{-u(t-1)i}\right)dt\Bigg]$$

然ルニ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{u}\int_{-A-1}^{-A+1} f(t)\left(e^{-u(t-1)i}-e^{uAi}\right)dt\right|^2 du \leqq \mathbb{K}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}\left(\int_{-A-1}^{-A+1}|f(t)|dt\right)^2$$

$$\leqq 2\mathbb{K}\int_{-A-1}^{-A+1}|f(t)|^2dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}\,.$$

コヽニ $\mathbb{K}$ ハ定数デアル．故ニ

$$\mathop{l.m.}_{A\to\infty}\frac{1}{u}\int_{-A-1}^{-A+1} f(t)\left(e^{-u(t-1)i}-e^{uAi}\right)dt=0$$

同様ニ

$$\mathop{l.m.}_{A\to\infty}\frac{1}{u}\int_{A-1}^{A+1} f(t)\left(e^{-Aui}-e^{-u(t-1)i}\right)dt=0$$

従ッテ $f(x)$ ノ "Fourier transform" ヲ $\mathbb{F}(u)$ トスルトキ．殆ンドスベテノ u ニ對シテ

$$\mathbb{F}(u)=\frac{e^{-ui}-e^{ui}}{-2ui}\,\mathbb{F}(u)=\cos u\cdot\mathbb{F}(u)$$

故ニ殆ンドスベテノ u ニ對シテ、$\mathbb{F}(u)=0$，従ッテ $f(x)=0$．
然ルニ $f(x)$ ガ (1) ヲ満足スルトキ、連続デアルカラ、$f(x)$ ハ恒等的ニ零デアル。

注意． 上ノ定理ニ於テ L^2 ノ代リニ $L^p\ (2\geqq p>1)$ デオキカ

ヘルコトガ出來ル、ソノトキニハ Plancherel ノ定理ノ代リニ Titchmarsh ノ定理ヲ用ヒレバヨイ。