112. Vereinigung ト Durchschnitt ノ 公理化ニ就イテ

石橋　榮（關西學院）

集合論ニ於ケル算法、和ト積ヲ、元ノ概念ヲ用ヒズニ規定スルトスレバ次ノ如クナルト思フ。即チ和ヲ記号＋デ、積ヲ・デ示セバ

(I) 結合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$,　$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

(II) 交換律　$A+B=B+A$,　$A\cdot B=B\cdot A$

(III) 分配律　$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$,　$(A\cdot B)+C=(A+C)\cdot(B+C)$

(IV) 同一律(?)　$A+A=A$,　$A\cdot A=A$

(V)　$A+B=A\cdot B$ ナラバ $A=B$

デアル。

上記ノ五公理ヲ基ニシテ集合論ノ定理ニ平行スルモノヲ少シ出シテミル。先ヅ(IV),(V)カラ

〔定理1〕　$A+B=A\cdot B$ ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ $A=B$ デアル。

〔定理2〕　$A\cdot B=A$ ナラバ $A+B=B$，及ビソノ逆ガ成立ツ。

(証)　$(A+B)+B=A+(B+B)=A+B$

$(A+B)\cdot B=A\cdot B+B\cdot B=A\cdot B+B=A+B$（$A\cdot B=A$ ナル假定ニ由ル）

故ニ　$(A+B)+B=(A+B)\cdot B$　　従ッテ (Ⅴ) カラ　$A+B=B$

即チ　$A\cdot B=A \longrightarrow A+B=B$.　　逆モ之ト平行ニ行ク。

（定義）　$A\cdot B=A$, 即チ　$A+B=B$　ナルトキ A ト B トノ

関係ヲ記号　$A<B$　デ表ハス。

関係 $<$ ハ集合論デ取扱フ関係 $\subset$ ノコトデアル。上ノ定

義カラ直チニ

〔定理3〕　$A<B$　且ツ　$B<A$　ナラバ　$A=B$.

〔定理4〕　$A<B$ デ $B<C$ ナラバ　$A<C$.

（証）　$A<B$ ダカラ　$A\cdot B=A$, 又 $B<C$ ダカラ　$B\cdot C=B$.

第二ノ関係ヲ第一ノ関係ニ持込メバ　$A\cdot(B\cdot C)=A$,

即チ　$(A\cdot B)\cdot C=A$.　之レニ第一ノ関係ヲ持込ンデ

$A\cdot C=A$.　故ニ　$A<C$.

〔定理5〕　$A<B$　且ツ　$A'<B'$　ナラバ　$A+A'<B+B'$ 及ビ

$A\cdot A'<B\cdot B'$

（証）　$A<B$ ダカラ　$A+B=B$,

故ニ　$(A+A')+(B+B')=(A+B)+(A'+B')=B+B'$

故ニ定義カラ

$$A+A'<B+B'.$$　$A\cdot A'<B\cdot B'$ モ同様.

〔定理6〕　$A\cdot B<A<A+B$.

（証）　$(A\cdot B)\cdot A=(A\cdot A)\cdot B=A\cdot B$.　故ニ定義カラ $A\cdot B<A$.

又 $A+(A+B)=(A+A)+B=A+B$.　故ニ　$A<A+B$.

（定義）$A, B, C, \cdots\cdots$ ノ凡テニ對シテ $>X$ ナル如キ X ヲ 0 デ表ハシ、又 $A, B, C, \cdots\cdots$ ノ凡テニ對シテ $<Y$ ナル如キ Y ヲ 1 デ表ハス。

$A, B, C, \cdots\cdots$ ガ夫々部分集合ニ相當スルトキ 0 ハ空集合, 1 ハ全集合ニ相當スルモノデアル。此ノ如キ 0 或ハ 1 ガ唯一ツニ限ルコトハ定理3カラ明白。以下カヽル $0, 1$ ガ存在スル場合ヲ取扱フ。

〔定理7〕凡テノ A ニツイテ

$$A\cdot 0=0,\quad A+0=A,\quad A\cdot 1=A,\quad A+1=1.$$

（証）$0, 1$ ノ定義ト關係 $<$ ノ定義カラ明白.

次ニ、任意ノ A ニ對シテ $A+X=1$ ナル如キ X; 又 $A\cdot Y=0$ ナル如キ X, Y ガ存在スル, 例ヘバ $X=1, Y=0$ トスレバヨイ。ソコデ此ノ如キ X 全体ノ積ヲ A' トシ、又此ノ如キ Y 全体ノ和ヲ $\bar{A}$ トスル。即チ

（定義）
$$A'=\prod_i X_i \qquad \text{但シ } A+X_i=1$$
$$\bar{A}=\sum_j Y_j \qquad \text{但シ } A\cdot Y_j=0$$

然ラバ $A', \bar{A}$ ハ次ノ性質ヲ有ツコトガ直ニ分ル。

〔定理8〕$A+A'=1.$ 又 $A+X=1$ ナラバ $X>A'.$

$A\cdot\bar{A}=0.$ モシ $A\cdot Y=0$ ナラバ $Y<\bar{A}.$

（定義）$A'=\bar{A}$ トナルトキ、元 A ヲ假ニ normal トイフコトニスル。

サウスレバ

〔定理9〕 Aガ normal ナルタメニ必要ニシテ充分ナル條件

ハ $A+\widetilde{A}=1,\quad A\cdot\widetilde{A}=0$

ナル如キ$\widetilde{A}$ノ存在スルコトデアル。

（証）i. 必要ナルコト. Aガ normal トスレバ $A'=\overline{A}$. 依

ッテ、之レヲ$\widetilde{A}$トスレバ

定理8カラ

$$A+\widetilde{A}=1,\quad A\cdot\widetilde{A}=0$$

ii. 充分ナルコト. $A+\widetilde{A}=1,\ A\cdot\widetilde{A}=0$ ト假定スル。然

ラバ $A+\widetilde{A}=1$ ナル故. 定理8ニ由リ $\widetilde{A}>A'$. 一方 $A+X_i=1$

ナル如キ X_i ヲ考ヘレバ $(A+X_i)\widetilde{A}=\widetilde{A}$.

然ルニ $A\cdot\widetilde{A}=0$ ナル故 $X_i\cdot\widetilde{A}=\widetilde{A}$ 故ニ $\widetilde{A}<X_i$

從ッテ定理5カラ. $\pi\widetilde{A}<\pi X_i=A'$ 公理(Ⅳ)ニヨリ

$\pi\widetilde{A}=\widetilde{A}$ 故ニ $\widetilde{A}<A'$. 之ト始メノ $\widetilde{A}>A'$ トカラ $\widetilde{A}=A'$.

同様ニシテ $\widetilde{A}=\overline{A}$ ナルコトモ分ルカラ $A'=\overline{A}$ 即チA

ハ normal デアル。（以上）

上記ノ証明ニ見ル通リ$\widetilde{A}$ガアルトスレバ $\widetilde{A}=\overline{A}=A'$ トナ

ルカラ、$A+\widetilde{A}=1,\ A\cdot\widetilde{A}=0$ ナル如キ$\widetilde{A}$ハ唯一ツニ限ル

コトガ分ル。

（定義） Aガ normal ナルトキ、$\widetilde{A}$ヲAノ共軛元ト云フコト

ニスル。

$\widetilde{A}$ハ集合論デ云ヘバAノ餘集合デアル。$\widetilde{\widetilde{A}}=A$ ナルコト

ハ明白。

〔定理10〕 Aハ normal トスル。然ラバ凡テノ X ニツイテ

$A\cdot X=0$ ト $\widetilde{A}\cdot X=X$ トハ同ジ意味デアル。

(証) $A\cdot X=0$ ト假定スレバ $X=1\cdot X=(A+\widetilde{A})X=A\cdot X+\widetilde{A}X$

$=0+\widetilde{A}\cdot X=\widetilde{A}\cdot X$.

又、$\widetilde{A}\cdot X=X$ ト假定スレバ $0=0\cdot X=(A\cdot\widetilde{A})X=A\cdot(\widetilde{A}\cdot X)$

$=A\cdot X$

〔定理11〕 Aが *normal* デ $A<B$ ナラバ

$$A+X=B,\quad A\cdot X=0$$

ナル如キXが存在シ、且ツ唯一ツニ限ル。ソレハ $X=\widetilde{A}\cdot B$ デアル。

(証) $X=\widetilde{A}\cdot B$ トオク、然ラバ

$A+X=A+\widetilde{A}\cdot B=(A+\widetilde{A})\cdot(A+B)=1\cdot(A+B)=A+B=B\ (\because A<B)$

$A\cdot X=A\cdot(\widetilde{A}\cdot B)=(A\cdot\widetilde{A})B=0\cdot B=0$.

故ニ上記ノ如キXハ確カニ存在スル。逆ニ

$$A+X=B,\quad A\cdot X=0 \text{ トスル。}$$

然ラバ $(A+X)\cdot\widetilde{A}=B\cdot\widetilde{A}\quad\therefore\ A\cdot\widetilde{A}+X\cdot\widetilde{A}=B\cdot\widetilde{A}$

$A\cdot\widetilde{A}=0$ デアルカラ $X\cdot\widetilde{A}=\widetilde{A}\cdot B$ 然ルニ一方 $A\cdot X=0$

ナル故定理10カラ、$\widetilde{A}\cdot X=X$ 　故ニ $X=\widetilde{A}\cdot B$.

$\widetilde{A}\cdot B$ ハ相對概念ヲ用ヰタトキノAノ餘集合デアル。

最後ニ

〔定理12〕 A及ビBが *normal* ナラバ $A+B$, $A\cdot B$ ハ *normal* デ

$$\widetilde{A+B}=\widetilde{A}\cdot\widetilde{B},\qquad \widetilde{A\cdot B}=\widetilde{A}+\widetilde{B}.$$

(証) $(A+B)+\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}=\big((A+B)+\widetilde{A}\big)\cdot\big((A+B)+\widetilde{B}\big)=(A+\widetilde{A}+B)(A+B+\widetilde{B})$

$$=(1+B)\cdot(A+1)=1\cdot 1=1.$$

又 $(A+B)\cdot\tilde{A}\tilde{B}=(A\cdot\tilde{A}\tilde{B})+(B\cdot\tilde{A}\cdot\tilde{B})=0\cdot\tilde{B}+\tilde{A}\cdot 0=0+0=0$

故ニ、定理9カラ $(A+B)$ ハ *normal* デソレノ共軛元ハ $\tilde{A}\cdot\tilde{B}$ デアル。 $\widetilde{A\cdot B}=\tilde{A}+\tilde{B}$ モ同様

以上デ大体基本的事実ガ導キ出サレタヤウニ思ハレル。従ッテ集合論ニ於ケル部分集合、相互ノ算法ハ集合ノ元ヲ用ヒズニ前記ノ公理群ノ上ニ組立テ得ルノデハナイカト思フ。