108. Stone ノ定理ニ就テ

吉田 耕作 (阪大)

Hilbert Space H ニ於ケル unitary operator ノ Schar U_t ガ群性質:

$$U_t U_s = U_{t+s}, \quad (U_t)^{-1} = (U_t)^{*}, \quad -\infty < t < +\infty$$

(＊ハ adjoint operator ヲ示ス) ヲ有スルナラバ

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d(E(\lambda) f, g)$$

但シ $f, g \in$ H, $E(\lambda)$ ハ所謂 resolution of the identity。之レガ Stone ノ定理デアル。Stone ハ $(U_t f, g)$ ガ t ノ連続函数ト云フコトヲ仮定シテ上ノ定理ヲ得タガ J. von Neumann ハ連続性可測性ヲ仮定スレバ連続性ノ出ルコトヲ示シタ。

所デ上ノヤウナ定理ハ之レヲ種々ニ應用スル見地カラ考ヘテモ出来ルダケ仮定ヲ少ナクシテ一般ナモノニスルノガ望マシイ。

筆者ハ F. Riesz: Über Sätze von Stone und Bochner, Acta Szeged 6 ヲ讀ンデ, Stone ノ定理ガ (i) linear (ii) hermitian metric (f, g) ノアル (iii) vollständig ナ空間 H′ (Hilbert space ノ様ニ separability ヲ要求シナイ) デモ成立スルヤウニ思フノデスガ、無知ナタメニ或ハ思ヒ違ヒヲシテルカモ知レマセン。御高教ヲ願フ次第デス。

偖テ H′デ考ヘマスト連続函数 $(U_t f, f) = p(t)$ ハ Bochner ノ所謂 positive-definite ナ函数ニナリマスカラ

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d\varphi(\lambda)$$

但シ $\varphi(\lambda)$ ハ $\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi(\lambda+0) = \varphi(\lambda)$ ナル條件デ unique ニ定ル limited 且ツ monotone ナ函数デス。之レカラ

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d\varphi(\lambda; f, g)$$

ココニ $\varphi(\lambda; f, g)$ ハ f, g ヲ與ヘルト λ ノ variations borné ナ函數。

ココ迄ハ F. Riesz ト全ク同様デス。ココデ $\varphi(\lambda; f, g)$ ガ resolution of the identity $E(\lambda)$ ニヨッテ $(E(\lambda)f, g)$ ト書ケルトイフ所デ Riesz ハ H ガ separable ト云フコトヲ essential ニ使ッテヲラナイノデ、例ヘバ F. Rellich: Spectral theorie in nicht separablen Räumen, Math. Ann. 110 Bd. 3 Heft ノ論法ヲ使ッテヤレルト思フノデス。

ココデ筆者ハ $(U_t f, g)$ ガ t ニツキ messbar トイフ假定シカナイトキニ separability ナシニ定理ガ成立スルカシナイカガ問題ダロウト思ヒマス。

Riesz ノ証明デハ separability ヲ essential ニ? 使ッテルヤウデスガ。

次ニ E. Hopf ハ Stz. Ber. Berlin 1932 XIV ニ於テ Stone ノ定理カラ U_t ガ同ジク abelian group ノ character ヲモツ V_t, W_t ヲ分解スルコトヲ示シマシタ：　$U_t = V_t + W_t$　且ツ

$$(V_t f, V_t g) = (V_0 f, V_0 g),$$
$$(W_t f, W_t g) = (W_0 f, W_0 g).$$

但シ V_t ハ $V_t f = F(t)$ ガ Hilbert space ノ metric ノ意味デ fast periodic 又 W_t ハ

$$\lim_{(b-a)\to\infty} \frac{1}{b-a}\int_a^b \left|(W_t f, g)\right|^2 dt = 0$$

ヲ満足スル。非常ニ興味アル結果デス。

Hopf ノ証明ヲミルト $E(\lambda)$ ノ Unstetigkatstelle ガ高々 abzählbar ト云フコトヲモトニシテヲリマス。併シ、若シ H' ガ separable デナイト U_t ガ unitary デアッテモ $E(\lambda)$ ノ Unstetigkeitsstelle ハ必ズシモ abzählbar デハアリマセン。然シ f, g ヲ與ヘタトキニ $\varphi(\lambda; f, g) = (E(\lambda) f, g)$ ハ variations borné デアリマスカラ、ソノ Unstetigkeitsstelle ハ高々 abzählbar（f, g ヲ與ヘルト定ル）。従ッテ Hopf ノ議論ヲ其ノママ使フト

與ヘラレタ f, g ニ對シテ、U_t ガ上ノ如キ性質ヲモツ部分 V_t, W_t ニ分解スル。（但シ $(V_t f, g)$ ガ普通ノ意味デ fast periodic）ト云フコトハ云ヘル様ニ思ヒマス。

之迄ノ議論ガ正シケレバ、相當一般ナ應用ガ可能ナヤウニ思ヒマス。