

101. 定規ト「開キノ定ツタコンパス」(Eichmass) ニ依ル作圖ニ就テ

彌永昌吉

Hilbert: *Grundlagen der Geometrie* の
最後ノ章(第七章)ニ就テ起ツタ疑問ヲ讀者ニ質シ度イ。

コノ章デハ要スルニ、定規ヲ出來ル作圖ノ外、(A) 線分
ノ移動: 即チ、與ヘラレタ線分 a ; 及ビ與ヘラレタ直線 l ,
ソノ上ノ定点 A , l 上ニ A ニ關シテ定メラレタ側——ガアル
トキ、コノ側ニ点 B ヲトツテ $AB = a$ ナラシメルコト、同様
ノ意味デ

(B) 角ノ移動

ガ可能トスルトキ、如何ナル作圖題ガ可能トナルカ? ト云
フ問題ガ論ザラレテアル。(「作圖題」トカ、ソレガ「可能」
トカイフ意味ヲ公理的立場カラ嚴密ニ述ベルノハ可成リ面倒
ナノデ、コノデハ差控ヘル) 但シ、「定規ヲ出來ル作圖」トハ
イフマデモナク「二点ヲ結ガ直線ヲ引ク」トカ、「二直線ガ
交ルトキ、ソノ交点ヲ求メル」トカイフ作圖; 以下略シテ(L)
ト書ク。

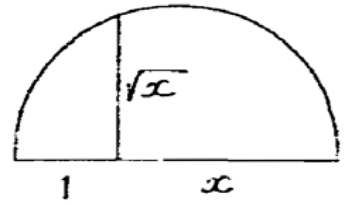
Hilbert ハコノ問題ヲ興味アル代數學ノ向題ニ移シテ
居ルノデ、ソコニコノ章ノ主流ガアル。ソノ一々思ヒガケナ
イ結果ハ (L), (A), (B) デ出來ル作圖題ノ範圍ハ、定規トコ
ンパスデ出來ルソレヨリモ本質的ニ小サイコトデアル。即チ

解析幾何學的ニ考ヘレバ、定規ダケヲ出來ル作

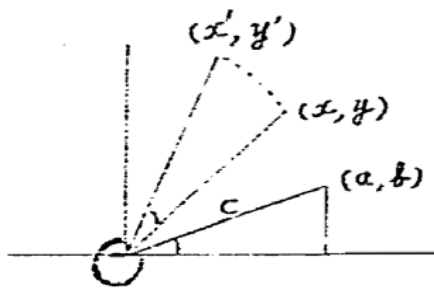
圖ハ一次方程式ヲ何度カ解クコトニナル

ノデ、ツマリ「有理運算」ニ相當スルガ、

コンパスヲ使ヘバ知ラレタ長サノ平方根ノ算出ガ出來ル。(上
圖)



然ルニ (L), (A), (B) デハ勝手ナ平方根ヲ出スノハ不可能
ナノデアアル。如何ニモ、(A), (B) ハ「平行移動」及ビ「迴轉」
ガ出來レバ出來ルコトガ容易ニ見エルガ、「平行移動」ハ有
理運算ノ範圍ヲ出デズ、「迴轉」ノ方程式ハ



$$\begin{cases} x' = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y \\ y' = -\frac{b}{c}x + \frac{a}{c}y \end{cases} \quad (c^2 = a^2 + b^2)$$

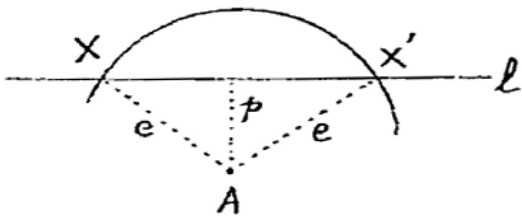
デアアルカラ、コトニ出テ來ル平方根 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ デハ根号ノ
下ニ必ず平方ノ和ガアル。コレハ任意ノ量デアナイ、例ヘバ
1 (デ表ハサレル長サ) ノミヲ知ラレタ長サトスルトキ、ソ
レカラ (L), (A), (B) デ作圖サレル (長サヲ表ハス) 数ハ何レ
代數的ナ実数デアアルガ、ソノ共軛モ亦凡テ実数トナル。何者、
 a, b ヲ共軛ガ皆実数デアアル様ナ代數的數 (始メ「知ラレ
タ」ノハ勿論コノヤウナ數) トスレバ $\sqrt{a^2 + b^2}$ モ亦ヤハリ其
ノ様ナ數デアアルカラ、($\sqrt{a^2 + b^2}$ 、共軛ハ $\pm\sqrt{a'^2 + b'^2}$ 、且シ a' 、
 b' ハ a, b ノ共軛、 a', b' ハ假定ニ由ツテ實数デアアルカラ、
 $a'^2 + b'^2 \geq 0$ 。ソノ平方根ハ虚數ニハナラナイ) 依ツテ共軛

が負 = ナルヤウナ数 — 例へバ $\sqrt{2} + 1$ — ノ平方根ノ作図ハ
 (L), (A), (B) デハ出来ナイ!

問題ハソコデ「有理運算ト算法 $\sqrt{a^2+b^2}$ ノ有限回ノ適用
 デ出テ来ル量ノ範囲如何? 共軌ガ皆実数メヤウナ代数的數
 ハソノ中ニ含マレルカ?」ナドトナツテ純代数的ニ進ム。—
 筆者ノ疑義ハコノ主流トハ離レテ、Hilbert ガ「(L), (A),
 (B) デ出来ル」トイフ條件ヲ「定規ト開キノ定ツタコンパス
 (Eichmass) = 依ル」ト云ヒ替ヘテキル点ニアル。

§36. (第七版) デ、定理 63 トシテ Hilbert ハ (L),
 (A), (B) デ出来ル作図題ハ定規ト開キノ定ツタコンパスデ出
 来ルコトヲ証シテキル。

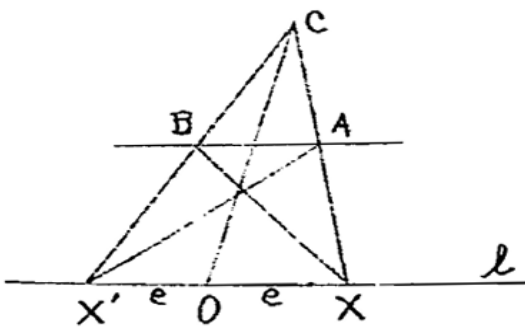
「定規ト開キノ定ツタコンパスデ」トイフノハ (L) ト次
 ノ作圖 (E) トノ可能ヲ假定スルノ意デアレ。



(E) 定ツタ長さ e ガアレルトスル。
 点 A ト直線 l トノ距離 $p (\geq 0)$
 ガ $\leq e$ ナルトキ、 l 上ニ点 X
 ヲ求メテ $AX = e$ ナラシメル

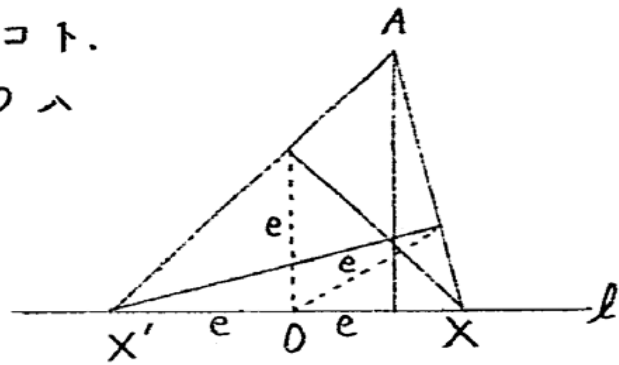
コト。

定理 63 ノ証明ハ初等幾何學的ヲ大略次ノ通り。



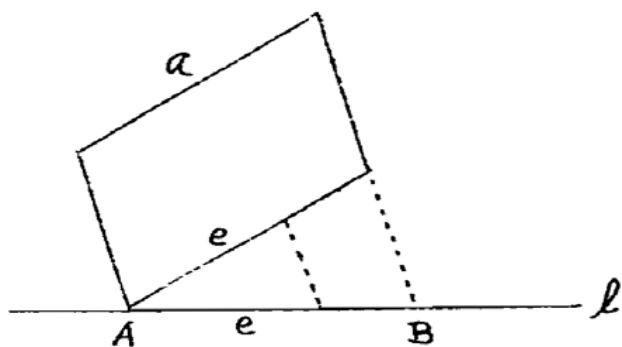
(A), (B) ヲ (L), (E) デ解ケバヨ
 イガ先ニ補助ノ作図題:
 (C) A カラ l = 平行線ヲ引
 クコト。

(D) A から l = 垂線ヲ引クコト。
 右図 = 示シタヤウ = 解ク。(O は
 l 上 = 任意 =、上図デハ C ヲ



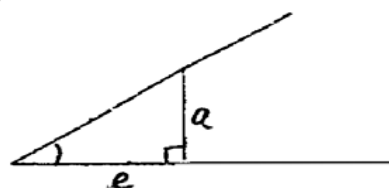
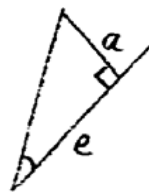
XA 上 = 任意 = トルノデアレ
 ソレガ出来レバ、(C), (E)

ヲ用キテ、右ノ如ク (A) ヲ解
 キ、次 = (D), (A) ヲ利用シテ
 (B) ヲ解ケバヨイ。



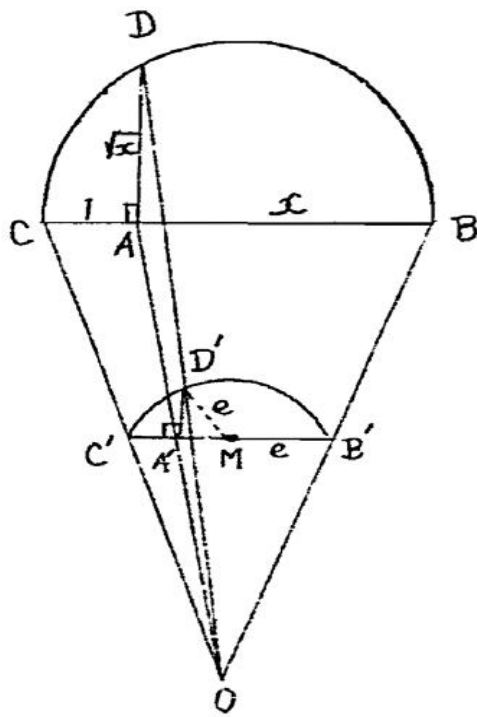
サテコノ逆「(L), (A),
 (B) デ、(E) ガ出来ルカ？」 =

施テハ Hilbert = ハ explicit
 = 何モ言ツテナイ。然シ § 37
 デハ Kriterium f. d.
 Ausführbarkeit geom.



Konstr. mittels Lineals und Eichmasses, 題
 名下 = (L), (A), (B) = 依ル作図ガ論ゼラレ、定規トコンパス
 デハ出来ルガ、(L), (A), (B) デハ出来ヌ作図ノ例ヲ挙ゲタ後
 = ハ (p. 120 下ノ方) “ ((L), (A), (B) デ出来ナイ,) und kann
 daher überhaupt nicht mittels Lineals und
 Eichmasses lösbar sein ” ト書イテアレ。然ルニ
 筆者ハ下ノ如ク (L), (E) = 由ツテ任意ノ知ラレタ長カノ平方
 根ノ作図ガ出来ル様 = 思フノデアレ。

(L), (E) ガ出来ルカラ、(A), (B), (C), (D) — 線分, 角



ノ移動; 平行線, 垂線ノ作図——
が出来ル。

x ノ平方根ヲトルノ=
 $1+x=2e$ ナラバ(開キノ定マラ
ヌ)コンパスダスルト同様ニ出来
ル。サモナケレバ、左図ヲ次ノ順
序ヲ作ル。

A, B, Cヲ先ヅ定メル(線分ノ
移動) AB = 平行線ヲ引イテ、ソ
ノ上ニ(任意ニ)一点Mヲトル、

B', C' ヲ(E)ヲ定メ、 BB', CC' 、交ハリO、 $OA, B'C'$ ノ交リ
 A' ヲ(L)ヲ定メル、 A' カテ $B'C' =$ 、 A カテ $BC =$ 夫々垂線ヲ
立テ、 D' ヲ(E)ヲ定ムレバ、 D ハ OD' ト A カテ BC ヘノ垂線
トノ交リトシテ出ル。

コレガ正シケレバ、コンパスノ「開キヲ定メル」ノハ無
意味デアラウ。

——コレハ小サナ初等幾何學的ノ注意ヲ、當ツテキヨウ
トキマイト、Hilbert 第七章ノ興味ニ変化ハナイ。唯々、
若シコレが當ツテキルトスレバ、三十年來之レニ氣付カレナ
カツタノハ稍々不思議ニ感ズル。——トイフノハ或ハ又筆者
ガ文献ニ暗イセイデ、夙ニ知ラレタコトデモアラウカ。