

99. L'hypothèse du continu = 関スル
Sierpiński の定理 = 就テ

箱葉三男 (五高)

Sierpiński の *Fund. Mathematicae*, XXIII デ
L'hypothèse du continu H が次ノ命題ト équivalent
ナルコトヲ証明シタ。

(P_0): 可附番ノ平面集合ノ Famille F が存在シテ
次ノ性質ヲ備ヘテ居ル。即チ F ノ集合可附番以上ノ無限個ノ
和ハ何レモ如何ナル一次元(直線上ノ) 集合 = \in homéo-
morphe デナイ。

ココデ、コノ homéomorphe ノ代リ = Sierpiński
ノ Quasi-homéomorphe (階シ classe ハ $0, \alpha$) トシ
テモ差支ヘナイ、ソノ証明法ハ Sierpiński ノヲ殆ド借用
出来ル。吾々ノ命題ヲ (P_α) トスル。

$P_\alpha \rightarrow P_0 \rightarrow H$ ナルコトハ Sierpiński = ヨツテ明カ
デアルカラ

$H \rightarrow P_\alpha$ ヲ導ケバヨイ。

$H \rightarrow P_\alpha$ ノ証明。

可附番以上ノ Borel 集合ノ全体ノ Famille ハ 2^{\aleph_0}
デアツテ、 $H(2^{\aleph_0} = \aleph_1)$ = 次ノ \aleph_1 = 排列サレル。

$B_1, B_2, \dots, B_\omega, B_{\omega+1}, \dots, B_\xi, \dots$ ($\xi < \aleph_1$)

(\aleph_1 ノ濃度ガ \aleph_1 デアル最小超限序數)

$\alpha < \Omega$ = 對シテ B_ξ ($\xi < \alpha$) トハツクモ一ノ点ヲ共有スル可附番集合 E_α が存在スル。 $F = \{E_\alpha\}_{\alpha < \Omega}$ トスレバ之レガ問題ノ F デアル。

今 $S \ni E_\alpha$ ノ可附番以上ノ無限個ノ和トスレバ、スベテノ $\alpha (< \Omega) =$ 對シテ $S \cdot B_\alpha \neq 0$ デアル ($\alpha < \xi, E_\xi \subset S$ ナル ξ が存在シ $0 \neq B_\alpha \cdot E_\xi \subset B_\alpha \cdot S$ デアルカラ)

假リ = S が直線上ノ集合 $L =$ *Quasi-homéomorphe* (*classe* ハ $0, \alpha$) デアルト假定シテ見ル。 *Laurentieff-Kuratowski* ノ定理。 [*Kuratowski, Topologie, I, 1933, p. 221*] = ヨツテ、コノ *homéomorphe* ハ S, L ヲ夫々含ム *classe* $\alpha+1$ デアル *Borel* 集合 $S^*, L^* =$ 接続スルコトが出来ル。 $C(S^*) \equiv$ 平面- $S^* \in$ *Borel* 集合デア
ル。

$C(S^*)$ ハ可附番デハナイ、モシソウデアルトスルト S^* ハ $x=a, y=b$ ナル二直線ヲ含ム從ツテ、コノ二直線ヨリナル集合が直線上ノ集合 = 一對一 = 連続 = 寫像サレルコトニナルガ之ハ不可能デアル。

從ツテ $C(S^*)$ ハ B_ξ ($\xi < \Omega$) ノ一ツ = 違ヒナシ。 トコロガ

$$C(S^*) \cdot S \subset C(S^*) \cdot S^* = 0, \quad C(S^*) \cdot S = \{$$

コレヲハ S ノ性質 = 反スル。 故 = S ハ直線上ノ集合 = ハ *quasi-homéomorphe* (*classe* ハ $0, \alpha$) デナイ。

(証明了)

コノ *Quasi-homéomorphe*, *classe* $\Rightarrow \alpha, \beta$ トシ

テハドウカト考ヘテ見テモ、之レハ次ノ定理ノタメニ駄目ナ
コトガ余ル。

Complet, séparable, 自己稠密ナ空間ハ無理数全
体ノ集合 = *quasi-homéomorphe* (classe $\alpha, 0$) ナ
アル。 [Kuratowski, *Fund. Math.* **XXII**, p. 210]

(註) A ナ B = *quasi-homéomorphe* (classe α, β) ト
ハ $A = f(B)$, f ナ一意, Baire, classe α , γ , 逆
函数 $B = g(A)$ ナ一意, Baire, classe β ナルコト。

(二月二十八日)