95. 二三ノ Matrixfunktionen ニツイテ

北川敏男，浅野啓三（阪大）

$A=(a_{ik})(i,k=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ n 次ノ Matrix, a_{ik} ハ real 又ハ komplex variable トシ $f(A)$ ヲ A ノ stetige Matrixfunktion トスル。[1] 以下 A ノ characteristic equation ヲ

$$\varphi(x)=|xE-A|=x^n+c_1x^{n-1}+\cdots\cdots+c_n=0$$

$$c_\nu=(-1)^\nu\sum_{\{i_1,\cdots,i_\nu\}}a_{\{i_1,\cdots,i_\nu\},\{i_1,\cdots,i_\nu\}}{}^{(2)}\quad(\nu=1,2,\cdots,n)$$

ソノ根，即チ Eigenwert ヲ $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n$ トスル。

定理 1) real 又ハ komplex variable ノ連続ナル Matrixfunktion $f(A)$ デ

(1) $f(A)$ ニ関シテハ A ノ $(n-1)$ 個ノ列（又ハ行）ヲ任意ニ ~~fix~~ シタ場合、残リノ列ノ Variable ニ関シテ連続ニナルコトヲ假定スレバ以下ノ証明ニハ充分デアル。

(2) $a_{\{i_1,\cdots,i_\nu\},\{k_1,\cdots,k_\nu\}}$ ハ A ノ $i_1,\cdots\cdots,i_\nu$ 行及ビ $k_1,\cdots\cdots,k_\nu$ 列ヲトツテ作ツタ ν 次ノ行列式

(1) $f(AB)=f(BA)$, $A=(a_{ik})$, $B=(b_{ik})$

ヲ満足スルモノハ $c_1,\cdots\cdots,c_n$ ノ函数デアル。

（証明） 連続性ニヨツテ (1) ハ

(2) $f(P^{-1}AP)=f(A)$

ト equivalent デアル. Matrix A ハ

(2) $f(P^{-1}AP) = f(A)$

ト equivalent デアル．Matrix A ハ

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ c_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ト同ジ characteristic equation ヲ有スル．従ッテAノ Eigenwert ガ全部相異ルナラバ、A ト A_1 トハ Elementarteiler ガ一致スルカラ Matrix $P(|P| \neq 0)$ ヲ適當ニトッテ

$$P^{-1}AP = A_1$$

トスルコトガ出來ル、故ニ

(3) $f(A) = f(A_1)$

Eigenwert ノ中デ等シイモノガアル場合デモ連續性ニヨッテ (3) ハヤハリ成立スル、逆ニ $c_1, \cdots\cdots, c_n$ ハ (1) ヲ滿足スルカラ，$c_1, \cdots\cdots, c_n$ ノ函數ハ (1) ヲ滿足スル。(証明終リ)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \\ c_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ c_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n-1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = A_0 B$$

今 $\quad E_1(t)=\begin{pmatrix} t & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ トシ

$$(4)\qquad f(ABE_1(t))=f(BAE_1(t)) \quad \left(従ッテ=f(AE_1(t)B)\right)$$

ヲ假定スレバ

$$B_1=E_1(t)^{-1}BE_1(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1t & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ c_nt & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad トシテ$$

$$f(A_0B_1)=f(A_0E_1(t)^{-1}BE_1(t))=f(A_0E_1(t)^{-1}E_1(t)B)=f(A_0B)=f(A_1)$$

$$\therefore \quad f(A)=f(A_1)=f\begin{pmatrix} c_1t & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n-1}t & & & 1 \\ c_n & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$t\to 0 \text{ トスルト} \quad f(A)=f\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \vdots & & 1 \\ c_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

従ッテ $f(A)$ ハ c_n, 即チ行列式 $|A|$ ノミノ函數ニナル、ヨッテ中野氏ノ証明サレタ定理ヲ得ル[1]。

定理 2) 連續ナル Matrixfunktion $f(A)$ ガ

$$f(ABC)=f(BAC)$$

ヲ滿足スルナラバ、$f(A)$ ハ行列式 $|A|$ ノミノ函數デアル。

特別ノ函數トシテ

$$S(AB)=S(BA), \quad S(A+B)=S(A)+S(B)$$

トナルモノヲ考ヘルト、ソレハ *linear* デアルカラ容易ニ

$$S(A)=ac, \quad (a \text{ ハ常数})$$

トナルコトガ分ル。又

$$n(AB)=n(A)n(B)$$

トナルモノハ $n(A)=\varepsilon|C_n|^{\rho} \; (\varepsilon=e^{im\theta},\ |A|=|C_n|e^{i\theta},\ m \text{ integer})$

トナル。[1]

輯報ノ Vol. XI. NO. 1 ニ於テ中野氏ハ南雲氏ノ証明サレタ *stetige Vektorfunktion* ニ関スル定理[2]ノ別証ヲ考ヘラレタ。[3] 南雲氏ハ連続性ヲ假定サレタガ、ソレハ必要デハナイ、ソノコトハ中野氏ノ証明カラモ分ル、尚定理ハ任意ノ *Körper* ニ於テ成立スル. *Körper* デナクテモ単位元ヲ有スル *Ring* デアレバヨイ。更ニソレラノ *Korper* 或ハ *Ring* ハ *kommutativ* デアルコトヲ要シナイ、此処デソノ定理ノ別証ヲ考ヘテミル。定理ハ次ノ様ニ述ベルコトガ出来ル。

定理: K ヲ単位元ヲ有スル *Ring* トシ、K ノ任意ノ (n,m)-*Matrix* X ニ一意的ニ K ノ (n,l)-*Matrix* Y ガ對應シ、此ノ對應ニ於テ PX ニハ PY ガ對應スルモノトスル。

---

(1) H. Nakano: *Über eine stetige Matrixfunktion*. (學士院記事 VIII. No.6)

(2) M. Nagumo: *Über eine kennzeichnende Eigenschaft der Linear-kombination von Vektoren und ihre Anwendung*. (*Göttinger Nachrichten* 1933)

(3) H. Nakano: *Über die Matrixfunktion*. (輯報 Vol. XI. NO. 1)

但シPハKノ任意ノ(n,n)-Matrix デ $n\geqq 2$. 然ルトキハ(m,l)-Matrix A が存在シ $Y=XA$.

lemma: Kノ任意ノ Vektor $\mathfrak{X}=(x_1,\cdots\cdots x_m)$=, Kノ Vektor $\mathfrak{Y}=(y_1,\cdots\cdots,y_l)$ が一意的ニ對應シ、$\mathfrak{X}$ノ linear Kombination $\sum_i \alpha_i \mathfrak{X}_i$ ニハ對應スル $\mathfrak{Y}$ ノ lineare Kombination $\sum_i \alpha_i \mathfrak{Y}_i$ が對應スルナラバ，(m,l)-Matrix A が存在シ $\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}A$.

(證明) $\varepsilon_i=(\overbrace{0,\cdots 0,1}^{i},0\cdots 0)\rightarrow \mathfrak{a}_i=(a_{i1},\cdots\cdots,a_{il})\;(i=1,2,\cdots\cdots,m)$ トシ $A=(a_{ik})$ トスレバ $\mathfrak{a}_i\longrightarrow\varepsilon_i A$.

$$\therefore\quad \mathfrak{X}=\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_i\longrightarrow\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_i A=\mathfrak{X}A.$$

$$X=\begin{pmatrix}x_{11},\cdots\cdots x_{1m}\\ \cdots\cdots\\ x_{n1},\cdots x_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{X}_1\\ \vdots\\ \mathfrak{X}_n\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}y_{11},\cdots\cdots y_{1l}\\ \cdots\cdots\\ y_{n1}\cdots\cdots y_{nl}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Y}_1\\ \vdots\\ \mathfrak{Y}_n\end{pmatrix}$$

トシ、Xニ現ハレル i-行目ノ Zeilenvektor $\mathfrak{X}_i$ ニ，對應スル Matrix Yノ i-行目ノ Zeilenvektor $\mathfrak{Y}_i$ ヲ對應サセル． $\mathfrak{X}_i\longrightarrow\mathfrak{Y}_i$

$$X\rightarrow Y,\quad E_{1i}X=\begin{pmatrix}\mathfrak{X}_i\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\longrightarrow E_{1i}Y=\begin{pmatrix}\mathfrak{Y}_i\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$ (E_{ij} ハ Matrizeneinheiten)

トナルカラ、Zeilenvektor $\mathfrak{X}$ ノ Menge ヲ考ヘルト、ソノ各々ニ Vektor $\mathfrak{Y}$ が一意的ニ對應スルコトが分ル。

逆ニ $\mathfrak{X}_i\longrightarrow\mathfrak{Y}_i$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ任意ノ n 個ノ對應スル Vektor トスレバ

$$X=\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_1\\ \vdots\\ \mathfrak{x}_n\end{pmatrix}\longrightarrow Y=\begin{pmatrix}\mathfrak{y}_1\\ \vdots\\ \mathfrak{y}_n\end{pmatrix}$$ ハ上ノ定理ニ於ケル *Matrix*

ノ對應ニナル、又

$$P=\begin{pmatrix}\alpha_1, \alpha_2, 0 \cdots 0\\ 0 \cdots\cdots 0\\ \vdots \qquad \vdots\\ 0 \cdots\cdots 0\end{pmatrix},\quad PX=\begin{pmatrix}\alpha_1\mathfrak{x}_1+\alpha_2\mathfrak{x}_2\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\rightarrow PY=\begin{pmatrix}\alpha_1\mathfrak{y}_1+\alpha_2\mathfrak{y}_2\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$(n\geqq 2!)$

デアルカラ $\alpha_1\mathfrak{x}_1+\alpha_2\mathfrak{x}_2\longrightarrow\alpha_1\mathfrak{y}_1+\alpha_2\mathfrak{y}_2$

従ッテ *Vektor* $\mathfrak{x}$ ノ *lineare Kombination* ニハ，對應スル *Vektor* $\mathfrak{y}$ ノ *lineare Kombination* ガ對應スル. ヨッテ *lemma* ニヨリ $\mathfrak{y}=\mathfrak{x}A$.

$$\therefore\quad Y=\begin{pmatrix}\mathfrak{y}_1\\ \vdots\\ \mathfrak{y}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_1A\\ \vdots\\ \mathfrak{x}_nA\end{pmatrix}=XA$$