94. 冪級數ノ切断多項式ニ就テ

鍋谷 堅次郎(東北大)

前ニ「調和函數ニ関スル二三ノ定理」ト題シテ述ベマシタノハ "Remarks on some theorems concerning sections of a power series I and II" ノ補遺ノ積リデアツタノデスガ、冪級数ノ場合ハ調和函數ノ場合ト少シ様子ガ違ヒマスノデ、ソレヲ明ニスルタメ、古イ原稿ノ一部ヲ次ニ述べマセウ。誤リガアリマシタラ御示教ヲ御願ヒ致シマス。

1. E. Landau ノ著書 Ergebnisse der Funktionen-theorie ノ第1章第1節定理1ノ要点ハ次ノ如ク述ベルコトガ出来マス。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

ヲ $|x|<1$ デ正則トシ、$n\geqq 0$ ニ對シテ

$$S_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu$$

$$t_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots\cdots+S_n(x)}{n+1}$$

トオケバ

$$|t_n(x)|\leqq M(r)$$

$M(r)$ ハ $f(x)$ ノ円 $|x|=r$ $(0\leqq r<1)$ 上ニ於ケル Maximum modulus ヲ表ハスモノトシマス。上ノ様ニ述べ変ヘルト調和函数ノ場合ト同様、次ノヤウニ擴張

サレルコトガ分リマス。

即チ

$f(x)$, $S_n(x)$, $t_n(x)$ ヲ前ト同様トシテ

$f(x)$, $S_n(x)$, $t_n(x)$ ヲ前ト同様トシテ

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|t_n(x)\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(x)\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad x=re^{i\theta}, \quad p\geqq 1$$

コノ不等式ニ於テ $0<r<1$ ニ對シテ等号ガ成立スルノハ $f(x)$ ガ常数ノトキニ限リマス。$p\to\infty$ トシタ場合ガ最初ニ述ベタ定理デス。

簡單ノタメ先ヅ $p=1$ ノ場合ヲ証明シマス。$x'=e^{i\varphi}$ トスルト

$$f(xx')(1+x'+\cdots\cdots+x'^n)^2 = S_0(x) + \sum_{\nu=0}^{1} S_\nu(x)x' + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu(x)x'^n + C_{n+1}^{(n)}(x)x'^{n+1} + C_{n+2}^{(n)}(x)x'^{n+2} + \cdots\cdots$$

ナル關係ガ成立シマスカラ

$$\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|x'|=1} \frac{f(xx')}{x'^{n+1}}(1+x'+\cdots\cdots+x'^n)^2 dx'$$

ガ得ラレマス。従ッテ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu(x)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|x'|=1}\frac{f(xx')}{x'^{n+1}}(1+x'+\cdots\cdots+x'^n)^2 dx'\right| d\theta$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|x'|=1}\left|\frac{f(xx')}{x'^{n+1}}(1+x'+\cdots\cdots+x'^n)^2 dx'\right|\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(xx')(1+x'+\cdots\cdots+x'^n)^2\right| d\varphi\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|1+e^{i\varphi}+\cdots\cdots+e^{in\varphi}\right|^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(xe^{i\varphi})\right|d\theta\, d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|1+e^{i\varphi}+\cdots\cdots+e^{in\varphi}\right|^2 d\varphi\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(x)\right|d\theta$$

$$=\frac{n+1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(x)\right|d\theta$$

故ニ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|t_n(x)\right|d\theta\leqq\int_0^{2\pi}\left|f(x)\right|d\theta$$

コノ不等式ニ於テ n ノ一ツノ値ト r, $0<r<1$ デルーツノ値ニ對シテ等号ガ成立スルナラバ $f(x)$ ガ常数デナケレバナラヌコトハ次ノ様ニシテ分リマス。ソレニハ上ノ証明ヲ見ルト分ル様ニ円 $|x|=r$ 上ニ於テ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|x'|=1}\frac{f(xx')}{x'^{\,n+1}}(1+x'+\cdots\cdots+x'^{\,n})^2dx'\right|d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{|x'|=1}\left|\frac{f(xx')}{x'^{\,n+1}}(1+x'+\cdots\cdots+x'^{\,n})^2dx'\right|d\theta$$

ガ成立シナケレバナリマセン、故ニ $|x|=r$ 上デ

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|x'|=1}\frac{f(xx')}{x'^{\,n+1}}(1+x'+\cdots\cdots+x'^{\,n})^2dx'\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|x'|=1}\left|\frac{f(xx')}{x'^{\,n+1}}(1+x'+\cdots\cdots+x'^{\,n})^2dx'\right|$$

ガ成立シナケレバナリマセン。コレガ成立スルタメニ必要

ニシテ十分ナ條件ハ $\frac{f(xx')}{x'^{n+1}}(1+x'+\cdots\cdots+x'^n)^2dx'$ ガ円 $|x'|=1$ 上デ一定ノ amplitude ヲモツコトデアリマス。然ルニ $\frac{1}{x'^{n+1}}(1+x'+\cdots\cdots+x'^n)^2dx'$ ハ $|x'|=1$ 上デ一定ノ amplitude ヲ有シマス。コレハ次ノ様式ニヨリ分リマス。

$$\frac{1}{x'^{n+1}}(1+x'+\cdots\cdots+x'^n)^2dx'$$

$$=\left(\frac{1}{x'^n}+\frac{1}{x'^{n-1}}+\cdots\cdots+1\right)\left(1+x'+\cdots\cdots+x'^n\right)\frac{dx'}{x'}$$

$$=(e^{-in\varphi}+e^{-i(n-1)\varphi}+\cdots\cdots+1)(1+e^{i\varphi}+\cdots\cdots+e^{in\varphi})d\varphi$$

$$=|1+e^{i\varphi}+\cdots\cdots+e^{in\varphi}|^2d\varphi$$

上ノ結果 $f(xx')$ ガ $|x'|=1$ 上、即チ $f(x)$ ガ $|x|=r$ 上デ一定ノ amplitude ヲ持ツコトニナリマス。$f(x)$ ハ $|x|=r$ 上及ビソノ内部デ正則デスカラ鏡像ノ原理ニヨリ $f(x)$ ハ全平面デ正則トナリ一ツノ常数デナケレバナリマセン。$f(x)$ ガ常数ナルトキハ上述ノ不等式ハ n ト r ノ如何ニ拘ラズ成立スルコトハ明カデス。

2. $p>1$ ノ場合ヲ証明、ルニハ上ノ証明ノ中途デ得ラレタ式

$$\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|x'|=1}\frac{f(xx')}{x'^{n+1}}(1+x'+\cdots\cdots+x'^n)^2dx'$$

ノ左右両辺ニ $\left(\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right)^{p-1}$ ヲ掛ケ

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right)^p=\frac{1}{2\pi i}\int_{|x'|=1}\left(\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right)^{p-1}\frac{f(xx')}{x'^{n+1}}(1+x'+\cdots\cdots+x'^n)^2dx'$$

トシテ進メバヨイノデス。

以下調和函数ノ場合ト大体同様デス。等号ガ成立スル場合ノ吟味モ上ノ $p=1$ ノ場合ト並行シテ同様ノ結果ニナルコトガ分リマス。

次ノ Landau ノ本ノ定理2モ同様ノ方法ニヨリ擴張サレ次ノヤウナ不等式ガ得ラレマス。

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{|S_0(x)|^2+|S_1(x)|^2+\cdots\cdots+|S_n(x)|^2}{n+1}\right]^p d\theta \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^{2p}d\theta,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{|S_0(x)|+|S_1(x)|+\cdots\cdots+|S_n(x)|}{n+1}\right]^{2p} d\theta \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^{2p}d\theta.$$

但シ後者ハ前者ノ直接ノ結果デアルコトハ各々ノ左辺ノ積分ノ Integrand ヲ比較スレバ明ラカデス、之等ノ不等式ニ於テモ $0<r<1$ ノ一ツノ r ト n ノ一ツノ値ニ對シテ等号ガ成立スルトキハ $f(x)$ ガ常数デナケレバナラヌコトガ証明サレマス。ソノ証明法ハ Math. Zeitschrift, 1 ニ於ケル O. Szasz ノ論文（177 page 及ビ 164 page）ニアル I. Schur ノ方法ト同様デス。

Landau ノ本ノ定理3及ビ第二節ノ Landau ノ定理モ同様ノ方針デ拡張サレマスガ此処ニハ略スルコトニシマス。　以上述ベタ結果ハ何レモ多変数ノ函数ノ場合ニ擴張スルコトガ出來マス。例ヘバ

$f(x,y)$ ヲ $|x|<R_1$, $|y|<R_2$ デ $x=r_1e^{i\theta}$, $y=r_2e^{i\varphi}$

ノ正則函数トスレバ

$$\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{(M+1)(N+1)}\left|\sum_{m,n=0}^{M,N}\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}a_{\mu,\nu}x^{\mu}y^{\nu}\right|\right)^{p}d\theta\, d\varphi\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(x,y)\right|^{p}d\theta\, d\varphi\right\}^{\frac{1}{p}},\qquad p\geqq 1$$