

93. Topologische Invariant トシテノーツノ metrischer Raum.

小松 醇 郎 (阪大)

[I] ヲーツノ n 次元 Komplex K ($n \geq 2$) = 對シニ種類ノ
diskrete + Gruppeヲ定義シ、ソノ Gruppenelemente
ノ間 = Entfernungsfunktionヲ規定シテ metris-
cher Raum トシマス。此ノ Raumガ Metrik ϵ 入
レテ kongment + 1ガ topologische Invariant
トナリマス。

此ノ Gruppeヲ使ツテ如何ナル結果が出ルカ、未ダ餘
リ長ク調べテモ見ナイノデスが今迄ノ所、次ノ様ナ新シイ
結果ヲ得テ居マス。

- 1) 三次元集合体デ fundamentalgruppeガ等シク
テモ尚且ツ homöomorphデナイヤリ + geschlossen
ノモノヲ判別スルニツノ criterionヲ與ヘル。
- 2) H. Kneserノ Irreduzibel + Mannigfaltigkeit
ハ此ノ第一種ノ Gruppeガ Einheitsgruppe = + ϵ
ノデアル。

3). 三次元 Mannigfaltigkeit が *asymmetrisch*
デアルタメノ必要且ツ充分條件ヲ此ノ第二種 *Gruppe*
ノ *metrischer Raum* = ヨツテ求メル。

以下此ノ *Gruppe*ノ *Definition* 及ビ上記結果ノ誘導
ヲ述ベテ見マス。

(II) *Flächengruppe erster Art.*

Komplex K ノ中デ球面ノ *eindentlich + stetiges*
Bild ヲナス *geschlossen*ノ曲面ヲ考ヘ、之ガ *stetige*
Deformation (homotop) デ一点 $= +v$ (*homotop 0*)
モノハ此ノ *Gruppe*ノ *Einheits element* = $+v$ 、曲
面 = *Orientierung* ヲ附シ、*Gruppenelement* a
トスレバ a^{-1} $+v$ *Element* ヲ表ハス曲面ハ逆ノ *Ori-*
entierung ヲ附シタモノ = シマス、 aa^{-1} ナル曲面ハ a ト
 a^{-1} トハ *stetige Deformation* デ移レマスカラ *Ein-*
heits element。

又 *Orientierung* ヲツケタニツノ曲面ノ結合 ab ハ又
一ツノ曲面ノ *stetige Bild* ト考ヘラレルカラ一ツノ
Gruppenelement ヲ表ス。勿論コノタメニハ曲面 (*ge-*
*nus 0*ノ) ヲ凡テ或ル *fixed* シタル一点ヲ通ラセル事ガ
必要デス、ツマリ ab ヲ *Zusammenhängend* = スル
コトガ必要デス、之ハ常ニ可能。

是デ一ツノ *Gruppe* ガ出来マス、Komplex ヲ *Unter-*
teilen シテモ此ノ *Gruppe* ハ *Invariant* トナリマ

スカラ之ハーツ / Topologische Invariant.

是が一級 = $\mathbb{A}$ abelian デナイコトハ 次 / zweiter Art / 群ト同様。

Kneser / Irreduzibel / Begriff ハ此 / Gruppe が Einheits-Gruppe デアルコトト äquivalent デアリマス。

ソレハ球面が Raumelement (≡ 次元 Simplex / stetiges Bild) / Rand トナツテ居ルナラベ球面 homotop 0 ハ明テカデスレ違 = homotop 0 ダトスルト球面ハ Deformation / 途中 / 経路 / 空間部分 / Rand デスシ、ソノ空間部分ハ任意 / 閉曲線が homotop 0 デスカラ、ーツ / Raumelement デアリマス、故 = 任意 / 球面が Raumelement / Rand トナツテ居ルト言フ Irreduzibel / 條件ハ Flächengruppe erster Art が Einheitselement / ミト云フ條件 = ナリマス。

此 / Gruppe = $\mathbb{A}$ Metrik ヲ入レルコトハ一寸無駄ダト思ヒマス。

(例) Irreduzibel / Mannigfaltigkeit ハ決シテ珍ラシイモノデハナク三次元球面 / fixpunktfrei / 運動群 = ヨリテ互ニ移サレタ点ヲ等シイ点ト考ヘテ生ズル集合体ハ皆 Irreduzibel デス。

斯様 = fundamentalgruppe が endliche Ord-

nung, Mannigfaltigkeit, ミデナクニツノ
円周 (Kreis), Topologische Produkt も亦
Irreduzibel デス

(III) Flächengruppe Zweiter Art.

例へバユークリッド空間, 中ノ Torus デ囲マレタ部分
ヲトレバ Torusfläche ハーツ, 閉曲線 = ハ stetige
Deformation デ移レルガ一点 = ハ移レナイ, 之ヲ homo-
top 1 トスル。

曲面 F , Geschlecht p ($p \geq 1$) ハ homotop 0
= ハ決シテナラナイコトハ次ノ如クナル。

(証). F homotop 0 ガトスルト stetige Deformation
デ移レル曲面ノ Schar F_t ガ存在シ

$F_1 = F$, $F_0 = \text{Ein Punkt}$ トナル。此ノ
 F_t デ作ツタ空間部分ノ Rand ガ F トナル, ソシテ
少クトモ p 個ノ曲線ハ homolog 0 = ナラナイ (Sei-
fert, 定理) 答、況ンヌ homotop 0 = ナラナイ
答デアルノ = 假定 = ヨレバー一点 = 縮マルノダカラ、皆
homotop 0. 以上

ソコデ Zweiter Art, Gruppe ハ次ノ如ク define
スル。閉曲面ノ stetige Bild = Orientierung 7
附シタモノヲーツノ Gruppenelement トシ modulo
homotop 1 デ移ル様ナニツノ曲面ハ等シイ Element
トスル。homotop 1 ナ曲面ハ Einheits-element ト

スル、勿論コノ場合モ曲面ハ凡テ一点ヲ通ラセテ *Zusammenhängend* = シテオク。前ト同様 = ab , 結合ハ a が *Geschlecht* p_1 , 曲面 , *Stetiges Bild* , b が p_2 , 曲面 , *stetiges Bild* トスレバ ab ハ少クトモ $p_1 + p_2$, *Geschlecht* , 曲面 , *Stetiges Bild* ト考ヘラレルカラヌーツ , *Gruppenelement* .

此ノ *Gruppe* モ亦 *Topologische Invariant* デアルコトハ明カデス、尚ホ又 *Wegegruppe* ノ様 = *kombinatorisch* + 方法デ嚴格 = 規定スルコトガ出来レハ勿論デセウ。

此ノ場合原点 = 結バタメ = ーツノ *Weg* ヲ以テシ曲面部分ノ縮マツタモノト考ヘテモヨイシヌーツノ二次元 *Simplex* 凡テ = 對シ原点ヲ通ルーツノ開曲面ヲ夫々固定サセテ置イテモ出来ヌウ。(Seifert 参照)

homotop 1 ハ *homotop 0* ヲ含ムト考ヘラレルカラ今度ノ *Gruppe* ハ前ノ *erster Art* ノ *Gruppe* ノ *Untergruppe* トシテ持ツ。

此ノ *Untergruppe* が *Normalteiler* デアラウト思フケレド一寸証明ガ思ヒ付キマセン。

此ノ *Gruppe* 全体ハ *Abelian* デハナイ、*Homologiegruppe* トノ関係、後章参照。

[IV] *Metrischer Raum*:

此ノ *Gruppe* = *Metrik* ヲ次ノ如ク入レル。

Gruppenelement a = 對應スル曲面が Geschlecht p の閉曲面, *eindeutig stetiges Bild* ト考ヘラレ
且ツ Geschlecht が p 以下, 閉曲面, *stetiges Bild*
トナリ得ナイトキ此ノ Gruppenelement ノ Norm τ
 $p+1$ トス. $N(a) = p+1$.

勿論 a ヲ表ハス多クノ閉曲面 (*homotop 1* デ互ヒ=移
ル) ノうちデ上記 Geschlecht 最小ナルモノヲトル。

常 = $p=0$, 即チ Norm が常 = 1 = ナツテ仕舞フトハ
限ラナイ、例ヘバ円周ニツノ *topologisches Produkt*
ハ Norm 2 ナルニツノ generator カラ出來ル *freies*
Produkt.

此ノ Norm ノ Definition = ヌルト

- i) $N(1) = 0$ $1 = \text{Einheitselement}$
- ii) $N(a) > 0$ $a \neq 1$
- iii) $N(a^{-1}) = N(a)$
- iv) $N(ba) = N(ab) < N(a) + N(b)$

ソレ故此ノ *Gruppenraum* = τ ニ点 (a, b) ノ *dis-*
tance トシテ

$$\rho(a, b) = N(ab^{-1})$$

ト定義スル。

然ラバニツノ *Mannigfaltigkeit* が *homöomorph*
デアアルタメニハ *Gruppe* トシテ *isomorph* デアルバカ
リデナク *Metrik* ニ亦一致シナクテハナラナイ、即此ノ

Metrischer Raum が topologische Invariant
デス。

尚ホ此ノ Metrisierung ノ性質トシテ Hopf ノ Abbil-
dungsgrad ノ Theorie ヲ用エルト次ノ關係ガナル。

$$V) \quad N(a) \leq 3 \quad \text{ナラバ} \quad N(a^2) = N(a)$$

斯様ノ Norm ヲ持ツ Gruppe ノ性質ヲモット細ク調べ
ネバナラナイガ未ダ試ミテ見マセヌ。

[V] 三次元可符号閉集合体ヲ fundamentalgruppe 等シ
クヲ尚ホ且ツ homöomorph デナイモノノ例。

○度々擧ゲタミツノ円周ノ Topologisches Produkt.

○ Geschlecht 3 ノ Heegaard Diagramm = テ
曲面ノ對應

$$\begin{cases} \gamma_i = t_i & (i=1, 2, 3) \\ u_i = s_i \end{cases}$$

γ_i, t_i 共 = homotop 0 in Vollbrezeln.

兩者共 = fundamentalgruppe ノ Erzeugende 3 ヲ
zyklische Gruppe, freies Produkt, endliche
Ordnung ノ Element ナリ。(Seifert: Topologie
S. 156)

故ニ二次元 Homologiegruppe ㊦ Duality ノ定
理ニヨリテ致ス。

是ガ homöomorph デナイコトハ前者ハ Flächengruppe
erster Art ガ Einheitselement ナリ, 後者ハ三

ツ) Erzeugende がアル、即ち erste Art, Flächengruppe / ミデ既 = homöomorph デ +1 コト がアル。

[VI] Homologiegruppe ト、関係

ニ次元 homologiegruppe ハ Flächengruppe
Zweiter Art, Untergruppe デアルハ明カ。ソコ
デ此, Zweiter Art, Gruppe, Element,
Kommutatorelement ヲ考ヘルト之ハ皆 Homologie-
gruppe, Einheitsselement = +1, Rand ヲナ
ス曲面 デアル。ソコデ逆 = nullhomolog ナ曲面ガ Kom-
mutatorgruppe = 這入ルコトヲ示セバ Abelschmachen
シテ Homologiegruppe = ナルヲ知ル。

$$u^3 = \sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i E_i^3$$

ガ Randfläche F , 空間部分トスル、各 Simplex E_i^3
= 對シソノ Orientierung ヲ持ツ表面ヲ原点 O ト結テ
各閉曲面 f_i ヲ考ヘル。 f_i ハ皆 nullhomotop. 故 =
 F ハ

$$F' = F(f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \dots f_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}})^{-1}$$

= Deformation 可能。 $f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \dots f_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}}$ ハ然シ又 u^3
ノ Randfläche. 故 = Kette トシテ F ト等シイ、
即チ F' ハ Kette トシテ 0 . 従ツテ F' ハ各ニ次元
Simplex ヲ Orientierung 逆 = 二回通ル、ソコデ

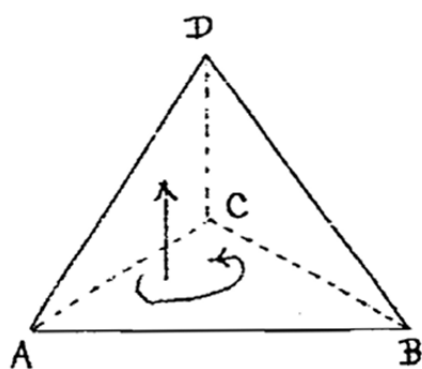
F' 、曲面ヲ *Flächengruppe* *Zweiter Art* デ表ハセバ各 *Element* ハ (+) 九回ナラヌ (-) 九回含マレテ表ハレル、即チ F' 、從ツテ又 F ハ *Kommutatorgruppe* = 含マレル。

Hullhomolog デハアルガ *Einschomotop* デナイ曲面ヲ持ツ集合体ヲ作ルコトが出来ルカヲ *Flächengruppe* *Zweiter Art* ハ一般ニハ *Abelian* デハナイ。

[VII] *Asymmetrische* 7 *Mannigfaltigkeit*、條件。

可符号集合体ヲ *Orientierung* ヲナシ之レが逆 = *Orientierung* シタモノト *Orientierung* が一致スル様 = *eineindentlich u. stetig*、對應カツケラレルトキ *symmetrisch*、然ラザルトキ *Asymmetrisch* ト云フ。

今 *Flächengruppe* *Zweiter Art*、各曲面ヲソノ切スル空間ト、*Orientierung*、關係ヲ規定シテオク、



例ヘバ、*Simplex*、正ノ符号図ノ如キモノトスレバソノ *Rand*、正ノ符号ハ ABC 、順デ與ヘラレルモノトス。

即チ *Ergengende* $a_1, \dots, a_r$ ヲ表ハス曲面 $f_1, \dots$

-----, $f_r =$ 對シソレヲ凡テ一ツ, Simplex a^3 , 一ツ
 , Randsimplex a^2 ヲ通ラセル. Mannigfaltig-
 keit Orientierte ナラ從ツテ a^3 , 從ツテ上記規定
 , 下 = a^2 Orientierte, 之 = 對シ a_i ヲ表ハス f_i ,
 Orientierung, 關係ヲ a^2 ト一致スレバ+, 反スレ
 バー トスレバ

$$f_i = \varepsilon_i n_i \quad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

が對應スル、サテ逆 = Orientierte Mannigfaltig-
 keit = テハ a^3 從ツテ a^2 , Orientierung 逆。
 故 = $\varepsilon_i n_i$ ヲ變ヘナイ様 = スル = ハ今度, Flächengruppe
 デハ f_i 從ツテ a_i^{-1} ナル Erzeugende ヲトルコト = ナ
 ル。

サテ Orientierung ヲ入レテ homöomorph = ナ
 ツタトスレバ

$|a^3|$ ヲ $|a^3|$ = 對應セシメタト考ヘ得ラレルカラ

a_i	$\varepsilon_i = a_i^{-1}$	Erzeugende
$n_i \varepsilon_i$	$n_i \varepsilon_i$	a^2 ト, 關係

+vニツ, Flächengruppe * isomorph u. iso-
 metrisch, 此処 =

$a_i a_j$ +v 曲面 = ハ $n_i \varepsilon_i + n_j \varepsilon_j$ が對
 應スル。

Element, integer $\sim$, homomorph,
 Abbildung = +v。

故=此、Orientierbar、Mannigfaltigkeit
 symmetrisch トラバ $a_1, \dots, a_r$ ヲ Erzeugende
 トシテ Metrik ヲ持ツ Gruppenraum ト $\varepsilon_i = a_i^{-1}$
 ヲ Erzeugende トシテ Metrik ヲ持ツ Gruppen-
 raum トガ isomorph u. isometrisch 即チ
 Kongruent デアル、ミナラズ同時=決レル integer
 へノ homomorphe Abbildung ガ一致シナクテハナ
 ラナイ。

ソレ故斯様ヲ Kongruent ガ成立シナイ様ヲ Flächen-
 gruppe ヲ持ツ Mannigfaltigkeit ハ Asym-
 metrisch デアル。

此ノ逆即チ Asymmetrisch デアルタメノ必要條件モ
 此ノ關係カラ言ヘルダラウト考ヘテモ見タガ耳計ラシイ。
 元來コノ Flächengruppe ガ isomorph u.
 isometrisch トハ如何ナル條件デアルカ、何カ簡單ナ
 關係デ表ハセナイモノデアルカ、又或一ツノ決レル Cha-
 rakter (上記 integer へノ homomorphe Ab-
 bildung) ハ一休如何ナル性質ノモノデアルカ、是等ハ
 先ツ第一=調べラレルべき問題ト思フ。

又 fundamentalegruppe トノ關係モ此ノ方面ノ
 Fragenkreis = 何等カノ解明ヲ與ヘルモノガアルト思
 フ。