

91. Selberg, 論文中, ニツ, Lemma = 就テ

高橋 進一 (阪大)

H. Selberg, *Algebroid Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale* (Skrift. utgitt av det Norske Videnskaps Oslo, 1934) p. 34-36 = ヲウ 2ツ, Lemma = 就テ若干, remark ヲ シタイト思ヒマス。

第一, lemma ハ

$$\varphi(x) = 1 + \gamma_1 x + \dots$$

ガ $|x| < R$ デ *regular* 且ツ 0 ナラズトセバ

$$(1) [M(r)]^{\frac{\nu}{r}} \leq M(\vartheta r)$$

此處 = $M(r)$ ハ $|\varphi(x)|$, $|x| = r$ = 於ケル *maximum*, 又 $0 \leq r \leq \vartheta r < R$ トスル

此, lemma ハ任意, $r (> 0)$ = 對シテ 嗜 = $M(r) \geq 1$ デアルカラ $\vartheta \geq 8$ デナイト *trivial* ナ不等式トナル。(1)ノ代リ = 私ハ

$$(2) [M(r)]^{\frac{\nu-1}{2}} \leq M(\vartheta r)$$

ヲ得ヌ。(2) ガト 兎 = 角 $\nu \geq 3$ ナル價値ノアル不等式トナル。又 $\nu \geq \frac{4}{3}$ ナラ $\frac{\nu-1}{2} \geq \frac{\nu}{8}$ ガカラ (2) ハ (1) ヲリハマシデアアル。

(2) の証明 = *Carathéodory* の不等式

$$m(r_1) \leq \frac{2r_1}{r-r_1} \log M(r), \quad R > r > r_1 > 0$$

ヲ用テ。但シ $m(r_1)$ は $\psi(x) = \log \varphi(x)$ ナル函数ノ $|x|=r_1$

ニ於ケル絶對値ノ *maximum* ナル。故ニ

$$m(r) \leq \frac{2}{\vartheta-1} \log M(\vartheta r), \quad \vartheta \geq 1$$

又 $\log M(r) \leq m(r)$ ナリ

$$\frac{\log M(\vartheta r)}{\log M(r)} \geq \frac{\frac{\vartheta-1}{2} m(r)}{m(r)} = \frac{\vartheta-1}{2}$$

故ニ

$$[M(r)]^{\frac{\vartheta-1}{2}} \leq M(\vartheta r), \quad \text{g. e. d.}$$

然シ實際ハ

$$[M(r)]^\vartheta \leq M(\vartheta r), \quad \vartheta \geq 1$$

ナル不等式ガ成立シサテニ思ハレル。

次ニ *lemma 2* ハ

$$\varphi(x) = 1 + \gamma_1 x + \dots \quad |x| \leq R \quad \text{regular}$$

且ツ 0 ナラズトスル。 $|\varphi(x)|$ / $|x|=r$ ($r \leq R$) = 於ケ

ル *maximum* ナ $M(r)$ トスルトキ

$$u(x) = \int_0^x \varphi(x) dx$$

ハ $|x| < \rho$ ナ $|u| < \frac{\rho}{2}$ ナル円ヲ含ム様ニ領域 = 單葉 = 寫像

スル。但シ

$$\rho = \text{Min} \left(\frac{R}{8(e+1) \log M(R)}, \frac{R}{2(e+1)} \right)$$

此ハ次ノ様ナ問題ト同ジデアアル。

$$\psi(x) = x + \gamma_2 x^2 + \dots \quad \forall |x| \leq R \text{ デ regular}$$

トシ且ツ

$$|\psi'(x)| \leq \frac{M(R)}{R}, \quad |x| \leq R$$

ナルトキ $|x| < \rho$ デ $\psi(x)$ が單葉ナルベキ ρ ノ上限 ρ_M 及ビ ψ 平面上デ $|x| \leq R$ ノ $\psi(x)$ = 依ル寫像領域内ニ含まレル單葉円ノ半径ノ上限、即チ Block ノ常数 B_M ヲ見出スコト。

此ノ問題ハ宛 = Landau が *Der Picard-Schothysche Satz und die Blochsche Konstante* (Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 1926) p. 471-474 デ完全ニ解決シタノデアツテ其ニ依レバ

$$\rho_M = \frac{R}{M(R)}, \quad B_M = M(R) \left\{ 1 + \left(\frac{M^2(R)}{R^2} - 1 \right) \log \left(1 - \frac{R^2}{M^2(R)} \right) \right\}$$

デアアル。

然モ之等ノ數値ハ何レモ best ナ結果デ之以上大キクスルコトハ出来ヌ。故カラ lemma 2 ハ全ク無意味ナモノトナ

尚 $|\psi'(x)| \leq \frac{M(R)}{R}$

ノ代リ =

$$|\psi(x)| \leq M(R) \quad |x| \leq R$$

ナル條件 = 置換ヘヌトキ

$$\rho_M = M(R) - \sqrt{M^2(R) - 1}, \quad B_M = M(R) \left(M(R) - \sqrt{M^2(R) - 1} \right)^2$$

ナルコトモ Landau = 依ツテ知ラレテ居ル