81. 曲線ノ長サノ有限性ヲ保ツ寫像ニ就テ

南雲道夫

年モ改マリ，次第ニ又數物ノ大會ガ近ヅイテ來タノデ，ソロソロ年會ニ發表ノ研究ヲ考ヘネバナラナイ頃トナリマシタ。平日アマリ研究モシテ居ラヌノニ，紙上談話會デ度々打明ケテシマフト，大會デハ發表スベキ種ガ無クナッテシマヒマスカラナルベク紙上談話會ニハ不本意ナガラモ御無沙汰致シタイノデス。然シ飜ッテ考ヘテ見ルト物ハ考ヘ樣デ、紙上談話會ニ出シタ事ト同ジコトヲ數物ノ大會デ又繰返シテモ、別ニ支障ハ全ク無イ筈。ノミナラズ平素皆樣ノ耳ニサレタツマラヌ事ヲ再ビ大會場デ講演スルトナレバ『アゝ又アノ話カ！』トアッサリ聞イテ戴ケマス故，二三十分モカヽル樣ナ話デモ、サット十分カ五分デスマセテ、長タラシク皆樣ニ御迷惑ヲ掛ケズニスムデセウ。勝手ナ事ヲ述ベタテヽスミマセン，急イデ本論ニ入リマセウ。

扨テ25号デ距離空間（*metrischer Raum*）ニ於ケル曲線ノ長サヲ定義シマシタ。問題ハ『二ツノ互ニ*homöomorph*ナ距離空間 $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ ガアツテ、$\mathfrak{R}_1$ ニ於ケル有限ナ長サノ曲線ガ常ニ $\mathfrak{R}_2$ ニ於ケル有限ナ長サノ曲線ニ對應スル樣ナ $\mathfrak{R}_1$ ト $\mathfrak{R}_2$ トノ *topologische Abbildung* 如何』ト言フ事デス。一般ノ場合ハ出來マセンガ、$\mathfrak{R}_1$ ガ Kompakt デ測地的（$\mathfrak{R}_1$ ノ任意ノ二点 P, Q ニ對シテ、$\rho(P,Q)$ ニ等シイ長サノ P, Q ヲ結ブ曲線ガ $\mathfrak{R}_1$ 内ニ存在スルコト）ナ場合ニハ次ノ樣ナ結果ヲ得マシタ。

$\mathfrak{R}_1$ ノ任意ノ点 P, Q ニ對應スル $\mathfrak{R}_2$ ノ点ヲ P', Q' トシ、$\mathfrak{R}_1$

ニ於ケル距離ヲ $\rho_1(P,Q)$, $\mathfrak{R}_2$ ニ於ケル距離ヲ $\rho_2(P',Q')$ トスル。シカラバ $\mathfrak{R}_1$ ガ測地的デ *Kompakt* ナル場合ニ於テ、曲線ノ長サノ有限性ヲ保ツ寫像ノタメノ必充條件ハ;

$$\rho_2(P',Q') \leqq M\rho_1(P,Q) \qquad (M>0)$$

ナル有限ノ実数 M ガ存在スルコトデアル。

〔証明〕充分ナル事ハ明ラカデセウ。必要ナコトハ帰謬法ヲ用ヒレバ出來マス。

$$\frac{\rho_2(P'_n,Q'_n)}{\rho_1(P_n,Q_n)} \dashrightarrow +\infty$$ ナル点列ヲ考ヘマスト、

$\mathfrak{R}_1$ ガ *Kompakt* デスカラ、P_n, Q_n ハ一点 A ニ収斂スル様ニ選ベマス。($\rho_1(P_n,Q_n)\longrightarrow 0$ トナリマス; $\rho_2(P',Q')$ ガ有界デスカラ)。

又 P_n ヲ適當ニトバシテ取レバ

$$\frac{\rho_2(P'_n,Q'_n)}{\rho_1(P_n,Q_n)} > 2^n \quad \text{且ツ} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\rho_1(P_{n-1},P_n) = \text{有限}$$

トナリマス。自然数 N_n テバ

$$1 \geqq \rho_2(P'_n,Q'_n)\cdot N_n > \frac{1}{2}$$

ナル様ニ選ビマス。シカラバ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_1(P_{n-1},P_n)+N_n\{\rho_1(P_n,Q_n)+\rho_1(Q_n,P_n)\} = \text{有限}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_2(P'_{n-1},P'_n)+N_n\{\rho_2(P'_n,Q'_n)+\rho_2(Q'_n,P'_n)\} = +\infty$$

カクテ $\mathfrak{R}_1$ デハ P_{n-1} ヨリ P_n ニ至ル最短曲線ト, P_n ト Q_n トノ間ヲ N_n 回往復スル(最短曲線ニ沿フテ)ノヲ全部加ヘタ曲線ガ有限ナ長サトナリ; $\mathfrak{R}_2$ デハ之ニ相當スルモノガ無限ニ長クナリマス。(以上) ——(一月十九日)——