77. Cartan—角谷—Selberg ノ定理ニ就テ

吉田耕作（阪大）

有理型函数 $y=f(x)$ ノ逆函数 $x=g(y)$ ノ Riemann 面 F_y ヲ $|y|=k$ ナル円デ切ッタトキ全テ單葉ナル円 $|y|<k$ ガ切リトラレルナラバ

$$\text{(1)} \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(r,\frac{1}{f})}{\log T(r,f)} \leqq 1$$

之ガ H. Cartan ノ定理デアル。非常ニ重要ナ結果デアルガ其ノ証明ガ不完全ニ思ハレル。其ノ旨ヲ角谷静夫君ニ話シタ所、角谷君ハ直ニ少クトモ $\delta(0)=0$ ナルコトハ確ニ云ヘルコトヲ elegant ニ示サレタ（第19号）

最近出タ H. Selberg ノ論文（Avh. Norske Videnskaps Akademi i Oslo, 1934）ヲ見ルト矢張リ Cartan ノ paper ヲ怪シイト思ッタノカ、証明ヲヤリ直シテ

$$\text{(1)}' \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(r,\frac{1}{f})}{\log T(r,f.)} = \text{finite}$$

ヲ得テヰル。(1) ニハ達シテヰナイガ、之デ 0 ニ對スル如何ナル意味（Nevanlinna, Valiron 等）ノ defant モ 0 ナコトガ示サレタ譯デアル。尚角谷君ガ第19号ニ注意サレタ如ク、Selberg モ、F_y ヲ $|y|=k$ デ切ッタトキ全テ $y=0$

ニ於テノミ algebraic ニ分岐シタ領域ガ切リトラレ且ツ其分岐位數ニ有限ナ上限ガアルモノト假定（Cartan ノヨリ廣イ）シテ $(1)'$ ヲ證明シテヰル。

所ガ筆者ハ先ニ角谷君ノ結果（第19号）ニ對スル Remark トシテ"有理型函數ノ derivative ニ就テ"（第21号及ビ第23号ニ於ケル其補遺）ヲ出シテヰタ。之ヲ少シク modify シテ得ラレル下ノ <u>Lemma</u> ヲ使ヘバ $(1)'$ ノ得ラレルコトヲ注意シタイ。

Selberg ハ或種ノ Uniformisierungstranscendent ヲ使ツテ證明シテヰル。筆者ノ <u>Lemma</u> ハ Verzerrungssatz ヲ使ツテヰル丈ダカラ elementar デアルノミナラズ、之カラ E. Ullrich ノ結果モ得ラレルカラ（第21号参照）稍スグレテヰルト思ヒマス。

<u>Lemma</u> 有理型函數 $y=f(x)$ ノ逆函數分枝ガ全テ $|y|<\delta$ ニ於テ

$$x-x_i=c_i y^{\frac{1}{\lambda_i}}+d_i y^{\frac{2}{\lambda_i}}+\cdots\cdots,\quad c_i\neq 0,\ \lambda_i\geqq 1$$

ノ如ク展開出來ルモノトスル。然ラバ之等ノ逆函數分枝ニヨル $|y|\leqq\delta_1<\delta$ ノ Bild $X_i\ (i=1,2,\cdots\cdots)$ ハ互ニ外ニアル schlicht ナ閉領域デアル。各 X_i カラ夫々任意ニ一点 $\bar{x}_i$ ヲトリ出ストキ

$$(2)\begin{cases}\displaystyle\sum_i\left(\delta^{\frac{1}{\lambda_i}}-\delta_1^{\frac{1}{\lambda_i}}\right)\frac{\lambda_i^2\left|f(\bar{x}_i)\right|^{2\frac{\lambda_i-1}{\lambda_i}}}{|\bar{x}_i|^2|f'(\bar{x}_i)|^2(\log|C\bar{x}_i|)^4}=\text{收斂}\\ C\text{ハ或常數}\end{cases}$$

証明ハ第21号ト略同様デス。

(2)カラ直ニ *Uniformisierungstranscendent* ヲ用ヒテ出シタ *Selberg* ノ結果ト略々同ジモノガ得ラレル。

即チ

λ_i ノ上限ヲ λ, $k=\delta>\delta_1=1$ トシテ

$$
(3)\begin{cases}
\log\dfrac{1}{|f'(x)|}\leqq\log|x|+2\log\log|Cx|+\left(1-\dfrac{1}{\lambda}\right)\log\dfrac{1}{|f(x)|} \\
\qquad\qquad -\log\left|\delta^{\frac{1}{\lambda}}-1\right|+\log|d(x)|,\quad \text{if}\ \ |f(x)|\leqq 1 \\
|d(x)|\to 0 \quad \text{as} \quad x\to\infty
\end{cases}
$$

(3)カラ *Selberg* ニ倣ッテ (1)′ ヲ得ルコト次ノ通リ:

$\dfrac{1}{f}=\dfrac{f'}{f}\,\dfrac{1}{f'}$ ナル故

$$
m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqq m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{0 \\ |f|\leqq 1 \\ |x|=r}}^{2\pi}\log\frac{1}{|f'(x)|}\,d\theta
$$

$$
\leqq m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)m\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(\log r)
$$

故ニ $m\left(r,\frac{1}{f}\right)=O(\log r\,T(r,f))$, 但シ其ノ *Total variation finite* ナル如キ r ノ値ヲ除ク。

上ノ証明ヲミレバワカル通リ $\lambda=$ *finite* デナクトモ $|x|=r$ ノ $f(x)$ ニヨル *Bild* ニヨッテ切ラレル円板 $|y|<k$ ノ最大連結数ヲ $\lambda(r)$ トスルトキ

$$
\log\left|\frac{1}{\delta^{\frac{1}{\lambda(r)}}-1}\right|^{\lambda(r)}=O\left(T(r)^{1-\varepsilon}\right),\quad \varepsilon>0 \ \text{ナラバ}
$$

$\delta(0)=0$ ハ云ヘル。之爲ニハ $\lambda(r)=O\left(T(r)^{1-\varepsilon_1}\right)$, $\varepsilon_1>\varepsilon$

ナラバ充分デアル。同様ノ注意ヲ角谷君ガ第19号ニ於テサレタガ角谷君ノハ

$$\int^{r}\frac{\lambda(t)^2}{t}dt=O(A(r)^{1-\varepsilon})$$

デアッタカラ、上ノ方ガ一般ニナッテヲルト思ヒマス。

同様ノ方法デ逆函数ガ $y=0$ ニ於テノミ logarithmic singularity (sonst regulär für $|y|<\delta$) ヲモツ様ナ分枝ヲモツ場合モ取扱ヘマスガ煩シイカラヤメテヲキマス。

――(1月2日)――